台灣省第一區(花蓮區)九十四學年度
高級中學數學及自然科能力競賽 解答

筆試一：計算證明題

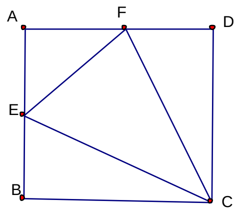
一、設正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，在邊 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 上分別取一點 E，F 使得△AEF 的周長為 2，試求∠ECF。

【解】設∠ECB＝α，∠DCF＝β，則 $\tan\alpha$=BE，$\tan\beta$=DF

EF=2-AE-AF=2-(1-BE)-(1-DF)=BE+DF=$\tan\alpha+\tan\beta$

由 $AE^2+AF^2=EF^2 \Rightarrow (1-\tan\alpha)^2+(1-\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2$

解之得 $\tan(\alpha+\beta)=1 \to \alpha+\beta=\pi/4$



二、已知直角三角形 ABC 的直角頂為 $A(1,2)$，另兩點 B、C 在拋物線上 $y^2=4x$ 上，則直線 BC 會通過一定點，並求出此頂點坐標。

【解】設 $B(s^2,2s),\quad C(t^2,2t)$ 則 BC 之直線方程式為 2x-(s+t)y+2st=0，

∵∠BAC 為直角

$\therefore m_{AB}\times m_{AC}=\dfrac{2s-2}{s^2-1}\times\dfrac{2t-2}{t^2-1}=\dfrac{4}{(s+1)(t+1)}=-1$，故 (s+1)(t+1)=-4

∵s+t=-5-st ∴BC 之直線方程式為

2x-(s+t)y+2st=2x+(5+st)y+2st=(2x+5y)+st(y+2)=0

故直線 BC 通過定點 2x+5y＝0，y+2=0，即 （5, -2）

三、宇富小朋友的存錢計畫：母親在每年年初時從宇富的壓歲錢裡拿出 100 元存起來，父親則在年底時檢查宇富的存款，並存入相同的金額(存款加倍的意思)。此存款計畫從今年年初開始，並令 a_n 是第 n 年年中時，宇富的存款總數。

(1)寫下 a_n 與 a_{n+1} 的關係。

(2)求 a_n 的一般項公式。

(3)第幾年之後，宇富小朋友的存款會超過一百萬元。

【解】(1)第 n+1 年年中的錢數等於第 n 年錢數的兩倍，再加過年每親存的 100 元，即 a_{n+1} 與 a_n 有如下的遞迴關係：$a_{n+1}=2a_n+100$

(2)將遞迴關係 $a_{n+1}=2a_n+100$ 改寫成 $(a_{n+1}+100)=2(a_n+100)$

也就是說，$\langle a_n+100\rangle$ 是首項 $a_1+100=100+100=200$，公比 2 的等比數列。由等比數列的一般項公式，得

$$a_n+100=(a_1+100)\cdot 2^{n-1}=200\cdot 2^{n-1}=100\cdot 2^n \Rightarrow a_n=10(2^n-1)$$

(3)設第 n 年之後，宇富的存款會超過一百萬元，也就是說 $a_n\geq 10^6$，即

$$a_n=100(2^n-1)\geq 10^6 \Rightarrow 2^n>10000$$

解得 $n\geq 14$。故第 14 年之後，宇富的存款會超過一百萬元。

四、設二次方程式 $x^2+bx+c=0$ 滿足 $b^3-3cb+c(c+1)=0$。證明：該二次方程式的一根為另一根的平方。

【解】(a) 由根與係數關係知道 $\alpha+\beta=-b, \alpha\beta=c$，將它代入得到

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta^2)(\beta-\alpha^2)&=\alpha\beta+(\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\\&=c+c^2+b((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta)\\&=c+c^2+b(b^2-3c)\\&=b^3-3cb+c(c+1)\end{aligned}$$

(b)：因為 $b^3-3cb+c(c+1)=0$，所以由 (a) 知道

$$(\alpha-\beta^2)(\beta-\alpha^2)=0\Rightarrow \alpha=\beta^2 \text{ 或 } \beta=\alpha^2$$

無論是哪一種情形，該二次方程式的一根為另一根的平方。