

台灣省第一區(花蓮區)九十四學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，第一題十二分，第二題十二分，第三題十三分，第四題十二分，滿分四十九分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

一、設正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，在邊 \overline{AB} 及 \overline{AD} 上分別取一點 E, F 使得 $\triangle AEF$ 的周長為 2，試求 $\angle ECF$ 。(十二分)

二、已知直角三角形 ABC 的直角頂為 $A(1, 2)$ ，另兩點 B, C 在拋物線 $y^2 = 4x$ 上，試證直線 BC 會通過一定點，並求出此定點坐標。
(十二分)

三、宇富小朋友的存錢計畫：母親在每年年初時從宇富的壓歲錢裡拿出 100 元存起來，父親則在年底時檢查宇富的存款，並存入相同的金額(存款加倍的意思)。此存款計畫從今年年初開始，並令 a_n 是第 n 年年中時，宇富的存款總數。

(1) 寫下 a_n 與 a_{n+1} 的關係。(三分)

(2) 求 a_n 的一般項公式。(四分)

(3) 第幾年之後，宇富小朋友的存款會超過一百萬元。(六分)

四、設二次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ 滿足 $b^3 - 3cb + c(c+1) = 0$ 。證明：該二次方程式的一根為另一根的平方。(十二分)