94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區）　筆試(二)試題

注意：請在答案卷上作答，須列過程及說明理由
　　　作答時間一小時

1、證明：若 $x>0,y>0$ 且 $x^3+y^3=x-y$，則 $x^2+y^2<1$。(易)

證明：$x>y>0$，$1=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}>\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2>x^2+y^2$。

2、已知 $m,n\in N,m>n$ 且 (4^m+4^n) 可被 100 整除，求 $m+n$ 之最小值。(易)

略解：$\because 100\left|4^n(4^{m-n}+1)\right.$ $\therefore 25\left|4^{m-n}+1\right.$；得知 $m-n=5$

解得最小值 $m=6$，$n=1$，故 $m+n=7$。

3、已知實數 x,y 滿足條件：$\begin{cases}\sin x+\cos y=1\\ \cos x+\sin y=1\end{cases}$，試證：$\cos 2x=\cos 2y$　(易)

略解：將條件中的二式兩邊都平方，化簡後得 $\sin x\cos y+\sin y\cos x=0$,
即 $\sin(x+y)=0$,　所以 $x+y=k\pi,k$ 為整數。故 $\cos 2x=\cos 2y$.

4、試求所有實數數對 (a,b) 使得 $6x^2-24x-4a=0$, 及 $x^3+ax^2+bx-8=0$ 的解都是非負實數解。

略解：$(a,b)=(-6,12)$ (中等)

5、空間中, E 平面上有一個正三角形 ΔABC，正射影到另一 F 平面上，得到一個新三角形 $\Delta A'B'C'$，其三邊長分別為 2，3，$2\sqrt{3}$，試求兩平面夾角 θ .(易)

略解：$\theta=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{429}}{39}$

6、將一個矩形方格板像西洋棋盤那樣地塗上黑白色，於是矩形的對角線也被分成黑色與白色的線段；若矩形每個方格邊長為 1 單位，而矩形的長和寬分別為 51 單位和 49 單位，試求對角線上白色線段長之和與黑色線段長之和的比。

略解：白色線段長之和與黑色線段長之和的比=