

94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區 (高雄區) 筆試(一)試題

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由
作答時間二小時

1、設 $f(x) = x^{2005} + x^{2004} + \dots + x + 1$ ，試求 $f(x^{2006})$ 除以 $f(x)$ 所得的餘數。

2、設 a, b, n 為整數，若 $a+b$ 可被 n 所整除，且 $a^2 + b^2$ 可被 n^2 所整除。

試證：對所有正整數 k ， $a^k + b^k$ 可被 n^k 所整除。

3、已知正數 a, b, c 滿足 $abc=1$ 。試證：

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}$$

4、在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， D 為 \overline{AC} 的中點，且 $\overline{BD} = \sqrt{3}$ 。試問當 $\angle BAC$ 為何值時， $\triangle ABC$ 的面積有最大值？此面積最大值為何？

5、設正方形 $ABCD$ 的邊長為 2，若 P 為正方形外之一點使 $\overline{AP} \parallel \overline{BD}$ ，且 $\overline{BP} = \overline{BD}$ ，

試求：(a) $\angle APD$ 的度數 (b) 線段 \overline{AP} 之長

94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區(高雄區) 筆試(二)試題

注意：請在答案卷上作答，須列過程及說明理由

作答時間一小時

1、證明：若 $x > 0, y > 0$ 且 $x^3 + y^3 = x - y$ ，則 $x^2 + y^2 < 1$ 。(易)

證明： $x > y > 0, 1 = \frac{x^3 + y^3}{x - y} > \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2 > x^2 + y^2$ 。

2、已知 $m, n \in N, m > n$ 且 $(4^m + 4^n)$ 可被 100 整除，求 $m + n$ 之最小值。(易)

略解： $\because 100 \mid 4^n(4^{m-n} + 1) \therefore 25 \mid 4^{m-n} + 1$ ；得知 $m - n = 5$

解得最小值 $m = 6, n = 1$ ，故 $m + n = 7$ 。

3、已知實數 x, y 滿足條件：
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = 1 \end{cases}$$
，試證： $\cos 2x = \cos 2y$ (易)

略解：將條件中的二式兩邊都平方，化簡後得 $\sin x \cos y + \sin y \cos x = 0$ ，
即 $\sin(x + y) = 0$ ，所以 $x + y = k\pi, k$ 為整數。故 $\cos 2x = \cos 2y$ 。

4、試求所有實數數對 (a, b) 使得 $6x^2 - 24x - 4a = 0$ ，及 $x^3 + ax^2 + bx - 8 = 0$ 的解都是非負實數解。

略解： $(a, b) = (-6, 12)$ (中等)

5、空間中， E 平面上有一個正三角形 $\triangle ABC$ ，正射影到另一 F 平面上，得到一個新三角形 $\triangle A'B'C'$ ，其三邊長分別為 2, 3, $2\sqrt{3}$ ，試求兩平面夾角 θ 。(易)

略解： $\theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{429}}{39}$

6、將一個矩形方格板像西洋棋盤那樣地塗上黑白色，於是矩形的對角線也被分成黑色與白色的線段；若矩形每個方格邊長為 1 單位，而矩形的長和寬分別為 51 單位和 49 單位，試求對角線上白色線段長之和與黑色線段長之和的比。

略解：白色線段長之和與黑色線段長之和的比=

94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區） 口試試題

口試題目：

下圖中，將面積為 1 的矩形 $ABCD$ 沿一直線摺疊使 C 與 A 重合，其摺痕為 \overline{EF} ，若點 D 落在 D' 位置，試問五邊形 $ABFED'$ 的面積其最小值為何？

