教育部九十四學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】 $\binom{2n}{n} < \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \cdots + \binom{2n}{n} + \cdots + \binom{2n}{2n} = (1+1)^{2n} = 4^n$

$$\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} < 4 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

但 $n=5$，$\binom{10}{5} = 252 > 3^5$

$$\binom{10}{5}^{\frac{1}{5}} > 3$$

$n=4$，$\binom{8}{4}^{\frac{1}{4}} > 2$

故　$m=4$。

二、【解】令 $(p,q) = (2+\mathbf{cos}\,\theta, \mathbf{sin}\,\theta)$，由直接演算，我們獲得

$$(2+\mathbf{cos}\,\theta)^2 - (\mathbf{sin}\,\theta)^2 \geq 1 \Leftrightarrow 3 + 4\mathbf{cos}\,\theta + 2\mathbf{cos}^2\theta \geq 1$$ 。

三、【解一】

$$S_{\Delta GEF} = S_{\Delta ECG} - (S_{\Delta} + S_{\Delta ECF})$$

由 E 為 BD 的中點，所以

$$S_{\Delta ECG} = \frac{1}{2} S_{\Delta} \qquad (1)$$

又 F 為 AC 的中點，所以

$$S_{\Delta ECF} = \frac{1}{2} S_{\Delta} \qquad (2)$$

$$S_{\Delta GCF} = \frac{1}{2} S_{\Delta} \qquad (3)$$

把(1)、(2) 、(3)代入最初式子中

$$\therefore \quad S_{\Delta GEF}=\frac{1}{2}\left[S_{\Delta GBC}-\left(S_{\Delta AEC}+S_{\Delta AGC}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\text{四邊形 }ABCE\text{ 的面積}$$

而 E 為 BD 的中點，所以

$$\text{四邊形 }ABCE\text{ 的面積}=\frac{1}{2}\text{四邊形 }ABCD\text{ 的面積}$$

故 $S_{\Delta GEF}=\dfrac{1}{4}$ 四邊形 $ABCD$ 面積。

【解二】

令 $A=(e,f),B=(0,0),C=(a,b),D=(c,d)$, 則 $E=\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{d}{2}\right),F=\left(\dfrac{e+a}{2},\dfrac{b+f}{2}\right)$ 。

解 $\overline{AB}$ 直線方程式，得：$y=\dfrac{f}{e}x$

解 $\overline{CD}$ 直線方程式，得：$y=\dfrac{b-d}{-a+c}x-\dfrac{bc-ad}{a-c}$

由上述二方程式解得交點 G 座標為 $\left(\dfrac{(bc-ad)e}{be-de-af+cf},\dfrac{(-bc+ad)f}{-be+de+af-cf}\right)$

所以平行四邊形 $ABCD$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & a & c & e & 0\\ 0 & b & d & f & 0\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}(ad+cf-bc-de)$

而 ΔEFG 面積 $=\begin{vmatrix}\dfrac{c}{2} & \dfrac{e+a}{2} & \dfrac{(bc-ad)e}{be-de-af+cf} & \dfrac{c}{2}\\ \dfrac{d}{2} & \dfrac{b+f}{2} & \dfrac{(-bc+ad)f}{-be+de+af-cf} & \dfrac{d}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{8}(ad+cf-bc-de)$

故 $S_{\Delta GEF}=\dfrac{1}{4}$ 四邊形 $ABCD$ 面積。

四、【解】

(i) S_i 表 i 位數且正好有一個 5 的正整數所成的集合，則 $|S_1|=1$，

$|S_2|=8+9=17$，$|S_3|=8\times9+8\times9+9\times9=225$，

$|S_4|=8\times9\times9+8\times9\times9+8\times9\times9+9\times9\times9=2673$，

所以滿足條件的四位數 $=\sum|S_i|=2916$ 。

(ii)32805（同理）。