

教育部九十四學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題 (一)

編號：_____

(學生自填)

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、電影院經理宣佈，在排成一長列等候購票的顧客中，從前面數起，第一位與
(12分) 排在其前面任一人生日相同的顧客，將可獲得一張免費的電影票。假設每一個人出生於一年(365日)中任何一天的機率是相同的。試求

(1) 從前面數起，排在第 k 個位置會獲得電影票的機率 P_k 。

(2) 使 P_k 為最大的 k 是多少？

二、若 a 為無理數， n 為大於 1 的自然數，試證 $(a + \sqrt{a^2 - 1})^{-\frac{1}{n}} + (a - \sqrt{a^2 - 1})^{-\frac{1}{n}}$
(12分) 是無理數。

三、試證：當 a, p 其一為無理數時

(13分) $[(1-a) + (1+a)i]x_1 + [(1+a) - (1-a)i]x_2 + ap(1-i)x_3 + ap(1+i)x_4 = ap$

無整數解。

四、凸四邊形之四邊長為 a, b, c, d ，令 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ ， A 為一組對角和，試證該
(12分)

四邊形之面積為 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{A}{2}}$

由此或用其他方法解下面問題：求周長為 $2s$ 的四邊形之中，面積為最大的四邊形。