94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高屏區）　筆試(一)【參考解答】

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由
　　作答時間二小時

1、設$a_1, a_2, \ldots, a_{2005} > 0$，試證：$\dfrac{a_1^2}{a_2} + \dfrac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_{2004}^2}{a_{2005}} + \dfrac{a_{2005}^2}{a_1} \geq 2\sum_{k=1}^{2005} a_k$ 是否成立?

Sol:

令$a_1 = a_2 = \cdots = a_{2005} = 1$

則不等式左式= $1+1+1+\cdots+1 = 2005$

不等式右式= $2(1+1+1+\cdots+1) = 2(2005) = 4010$

顯然 左式<右式

故不等式無法成立

2、設f為實數函數，若對任意實數u，v均滿足$f(u)\cdot f(v) = f(u-2v) + f(u+2v)$且$f(1) = 1$，若$x$為正整數，試求 $f(12x+1)$之值。

Sol:

令$u = x+2$，$v = 1$

$f(x+2) = f(x) + f(x+4)$

因此 $f(x+4) = f(x+2) + f(x+6)$

由以上二式得 $f(x+6) = -f(x)$

故 $f(x+12) = -f(x+6) = f(x)$

$f(12x+1) = f(12(x-1)+1+12) = f(12(x-1)+1) = \cdots\cdots = f(1) = 1$

3、設實數 c,d,x,y 滿足 $\begin{cases} cx+dy=3 \\ cx^3+dy^3=16 \end{cases}$ 且 $\begin{cases} cx^2+dy^2=3 \\ cx^4+dy^4=16 \end{cases}$

試求：cx^5+dy^5之值。

Sol:

$$\because cx^3+dy^3=16=(cx^2+dy^2)(x+y)-(cx+dy)xy=7(x+y)-3xy$$

$$cx^4+dy^4=42=(cx^3+dy^3)(x+y)-(cx^2+dy^2)xy=16(x+y)-7xy$$

$$\therefore \quad x+y=-14, xy=-38$$

$$cx^5+dy^5=(cx^4+dy^4)(x+y)-(cx^3+dy^3)xy=42(x+y)-16xy$$

$$cx^5+dy^5=42\cdot(-14)-16\cdot(-38)=20$$

4、從 1 到 200 這 200 個自然數中，取出 n 個數，使取出的任何兩個數的和都不等於 n，則 n 的最大可能值為何？

Sol:

取 $n=1$，從 $S=\{1,2,3,\ldots,200\}$ ，取 200 一個數

取 $n=2$，從 $S=\{1,2,3,\ldots,200\}$ ，取 200 ,199 兩個數

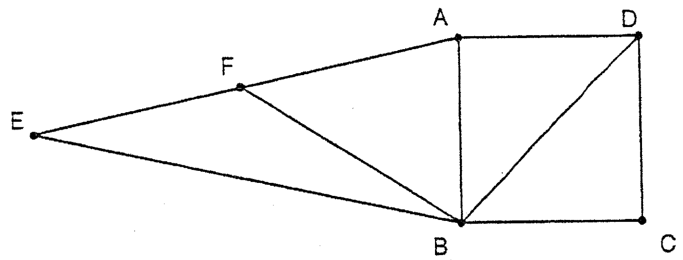
⋮

取 $n=$ 134，從 $S=\{1,2,3,\ldots,200\}$ ，取 $200,199,\ldots,67$ 共 134 個數，都滿足任何兩個數之和都不等於 n ，但 $n=135$ 卻不能滿足上述條件

故 n 的最大可能值為 134

5、設 ΔABE 在正方形 $ABCD$ 的外側，$AE=BE$；若 F 在線段 AE 上，且 $EF=AB$，$BF=BD$，試証：$\angle AEB=\dfrac{\pi}{7}$。

Sol:



設 $\overline{AB}=\overline{EF}=1$，則 $\overline{BF}=\sqrt{2}$

令 $\angle AEB=2x, \overline{BZ}=l$

由餘弦定理可得

$\overline{BF}^2=2=1+l^2-2l\cos 2x \cdots\cdots\cdots$ ①

由等腰三角形 AEB 可得

$\sin x=\dfrac{\frac{1}{2}}{l} \Rightarrow 2l\sin x=1 \cdots\cdots\cdots$ ②

由①、②消去 l 可得　$2=1+\dfrac{1}{4\sin^2 x}-\dfrac{1-2\sin^2 x}{\sin x}$

即 $8\sin^3 x-4\sin^2 x-4\sin x+1=0$

化成 $(\sin x+1)\left(8\sin^3 x-4\sin^2 x-4\sin x+1\right)=0$

可得 $\left(8\sin^4 x-8\sin^2 x+1\right)-\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)=0$

即 $\left(1-8\sin^2 x\cos^2 x\right)-\sin 3x=\left(1-2\sin^2 2x\right)-\sin 3x=\cos 4x-\sin 3x=0$

從而化為 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-4x\right)=\sin 3x$

在等腰三角形 AEB 中，由於 $\overline{AB}<\overline{AE} \Rightarrow 2x<\dfrac{\pi}{3}$，而得 $3x$ 為銳角

又由 $x>0$ 及 $2x<\dfrac{\pi}{3}$，可得 $-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}-4x<\dfrac{\pi}{2}$ 可知 $\dfrac{\pi}{2}-4x$ 亦為銳角

於是 $\dfrac{\pi}{2}-4x=3x$

故 $\angle AEB=2x=\dfrac{\pi}{7}$