

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
中區 (台中一中) 筆試(一)【參考解答】

一、【解答】

		骰子 1					
點數總和		1	2	3	4	5	6
骰子 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

點數總和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probability	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

玩一局 Craps 有 7 種方式可以贏。

$$E1 = \{\text{第一輪就丟擲出 } 7 \text{ 或 } 11 \text{ 點而贏}\} \quad P\{E1\} = 6/36 + 2/36 = 2/9$$

"Your Points" 可能是 4, 5, 6, 8, 9, 10.

$E4 = \{\text{以擲出 Your Point=4 而贏}\} = \{\text{第一輪擲出 } 4\} \text{ AND } \{\text{第二輪非 } 4 \& \text{ 第三輪擲出 } 4\} \text{ or } \{\text{第二、三輪非 } 4 \& \text{ 第四輪擲出 } 4\}$

$$\begin{aligned} P\{E4\} &= 3/36 \times \{3/36 + (27/36) \times (3/36) + (27/36) \times (27/36) \times (3/36) + (27/36) \times \\ &\quad (27/36) \times (27/36) \times (3/36) + \dots\} \\ &= 3/36 \times \left\{ \frac{3/36}{1 - 27/36} \right\} = (3/36) \times (3/9) = 1/36 \text{ or } \{\text{第二、三輪非 } 4 \& \text{ 第五輪擲出 } 4\} \end{aligned}$$

$E5 = \{\text{以擲出 Your Point=5 而贏}\}$

$$\begin{aligned} P\{E5\} &= 4/36 \times \{4/36 + (26/36) \times (4/36) + (26/36) \times (26/36) \times (4/36) + (26/36) \times \\ &\quad (26/36) \times (26/36) \times (4/36) + \dots\} \\ &= 4/36 \times \left\{ \frac{4/36}{1 - 26/36} \right\} = (4/36) \times (4/10) = 2/45 \end{aligned}$$

$E_6 = \{\text{以擲出 Your Point=6 而贏}\}$

$$\begin{aligned} P\{E_6\} &= 5/36 \times \{5/36 + (25/36) \times (5/36) + (25/36) \times (25/36) \times (5/36) + (25/36) \times \\ &\quad (25/36) \times (25/36) \times (5/36) + \dots\} \\ &= 5/36 \times \left\{ \frac{5/36}{1 - 25/36} \right\} = (5/36) \times (5/11) = 25/396 \end{aligned}$$

$E_8 = \{\text{以擲出 Your Point=8 點而贏}\} = \{\text{以擲出 Your Point=6 點而贏}\}$

$$P\{E_8\} = P\{E_6\} = 25/396$$

$E_9 = \{\text{以擲出 Your Point=9 點而贏}\} = \{\text{以擲出 Your Point=5 點而贏}\}$

$$P\{E_9\} = P\{E_5\} = 2/45$$

$E_{10} = \{\text{以擲出 Your Point=10 點而贏}\} = \{\text{以擲出 Your Point=4 點而贏}\}$

$$P\{E_{10}\} = P\{E_4\} = 1/36$$

$$\begin{aligned} P\{\text{贏一局 Craps}\} &= (2/9) + (1/36) + (2/45) + (25/396) + (25/396) + (2/45) + (1/36) = (976/1980) = \\ &= (244/495) = 0.49292929\dots \end{aligned}$$

二、【解答】

$$\text{令 } A_1 = (a_1, a_2), A_2 = (a_3, a_4)$$

$$A_3 = (a_5, a_6), A_4 = (a_7, a_8)$$

$$\text{則 } \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = a_1 a_3 + a_2 a_4$$

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_3} = a_1 a_5 + a_2 a_6$$

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_4} = a_1 a_7 + a_2 a_8$$

$$\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_3} = a_3 a_5 + a_4 a_6$$

$$\overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_4} = a_3 a_7 + a_4 a_8$$

$$\overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{OA_4} = a_5 a_7 + a_6 a_8$$

$\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_4}$ 四個向量至少有兩個向量間夾角小於或等於

$\frac{\pi}{2}$ ，故得證。

三、【解答】

設 AD 與 BE 交於 P

BE 與 CF 交於 Q

CF 與 AD 交於 R

且設 P 、 Q 、 R 相異

設 P 與 DE 在 CF 之同一側

\therefore AD 及 BE 均為面積之等分線

$$\therefore S_{\Delta PDE} + S_{\square PDCB} = S_{\square PDCB} + S_{\Delta PBA}$$

$$\therefore S_{APDE} = S_{APBA} \quad \therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PE}$$

同理 $\begin{cases} \frac{QC}{RC} \cdot \frac{QB}{RD} = \frac{QE}{RF} \cdot \frac{QF}{RA} \\ \frac{RC}{QC} \cdot \frac{RD}{QB} = \frac{RF}{QE} \cdot \frac{RA}{QF} \end{cases}$

$$\text{但 } \begin{cases} \overline{PA} > \overline{RA}, \overline{PB} > \overline{QB}, \overline{RC} > \overline{QC} \\ \overline{RD} > \overline{PD}, \overline{QE} > \overline{PE}, \overline{QF} > \overline{RF} \end{cases}$$

$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{RC} \cdot \overline{RD} \cdot \overline{QE} \cdot \overline{QF} > \overline{QC} \cdot \overline{QB} \cdot \overline{RA} \cdot \overline{RF} \cdot \overline{PD} \cdot \overline{PE}$ ② 與①矛盾！

\therefore "P、Q、R相異"不成立 $\therefore \overline{AD}$ 、 \overline{BE} 及 \overline{CF} 共線

四、【解答】

為了方便並不失一般性，設 10 公尺為 1 單位長，並設岸上速度為 5，而水中速度為 1。令救生員的位置為 E，AE 段不可能比 E 更好，又設 AB 邊上距離 B 為 1 單位長的點為 F，則 BF 段也不可能比 F 好，再設 BC 邊上距 B 為 2 單位長的點為 G，則 GC 段不可能比 G 更好，所以只需研究 AF、BG 段，再和 E 點作比較：

(1) 如果由 E 跳下水，所花時間為 $\frac{3}{1} = 3$ 。

(2) 如果在 AF 段跳下水，設此點距離 F 為 x 單位，則所花時間為

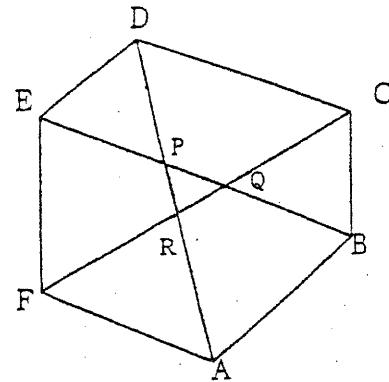
$$T(x) = \frac{5-x}{5} + \sqrt{x^2 + 4}, \quad 3 \geq x \geq 0$$

現在求 $T(x)$ 的值域。

$$\text{令 } y = \frac{5-x}{5} + \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\text{解 } x, \left[\sqrt{x^2 + 4} \right]^2 = \left[y - 1 + \frac{x}{5} \right]^2$$

$$x^2 + 4 = \frac{x^2}{25} + 2 \cdot (y-1) \left(\frac{x}{5} \right) + (y-1)^2$$



$$\frac{24}{25}x^2 - \frac{2(y-1)}{5}x + 4 - (y-1)^2 = 0 \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$x \text{ 的判别式 } \left[\frac{2(y-1)}{5} \right]^2 - 4 \cdot \frac{24}{25} \left[4 - (y-1)^2 \right] \geq 0$$

$$(y-1)^2 - 24 \left[4 - (y-1)^2 \right] \geq 0$$

$$\text{整理得 } y \geq 1 + \frac{4}{5}\sqrt{6} \quad \text{或} \quad y \leq 1 - \frac{4}{5}\sqrt{6} \quad (\text{不合})$$

以 $y = 1 + \frac{4}{5}\sqrt{6}$ 代入①解得 $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ，此满足 $3 \geq x \geq 0$

故在 AF 段 $T(x)$ 最小值為 $1 + \frac{4}{5}\sqrt{6}$.

(3) 如果在 BG 段跳下水，設此點距離 G 點 x 單位，則所花時間為

$$2 \quad T(x) = \frac{8-x}{5} + \sqrt{1+x^2}, \quad 2 \geq x \geq 0$$

現在求 $T(x)$ 的值域。

$$\text{令 } y = \frac{8-x}{5} + \sqrt{1+x^2}$$

$$\text{解 } x, \left[\sqrt{1+x^2} \right]^2 = \left(y - \frac{8}{5} + \frac{x}{5} \right)^2$$

$$x^2 + 1 = \frac{x^2}{25} + 2 \cdot \left(y - \frac{8}{5} \right) \cdot \frac{1}{5} x + \left(y - \frac{8}{5} \right)^2$$

$$\frac{24}{25}x^2 - \frac{2}{5}\left(y - \frac{8}{5}\right)x + 1 - \left(y - \frac{8}{5}\right)^2 = 0 \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$$\text{判別式 } \left[\frac{2}{5} \left(y - \frac{8}{5} \right) \right]^2 - 4 \cdot \frac{24}{25} \left[1 - \left(y - \frac{8}{5} \right)^2 \right] \geq 0$$

$$y \geq \frac{8}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \text{或} \quad y \leq \frac{8}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad (\text{不合})$$

以 $y = \frac{8}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}$ 代入②得解 $x = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ ，此滿足 $0 \leq x \leq 2$

所以 BG 段最小值為 $\frac{8}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

比較(1)(2)(3)知 $\frac{8}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}$ 最小。故救生員應先跑到 BG 段距離 G 點 $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ 單位的地

方(也就是 $\frac{10}{2\sqrt{6}}$ 公尺)再跳入水中。