九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

北區　第三區（成功高中）　　筆試(二)【參考解答】

1.在實驗室做球的反彈試驗，當乒乓球從 60 公分高的地方自然落下，第一次反彈的高度為 48 公分，接下來都是以相同的比例反彈。試問在第_____次反彈後，其高度會低於 6 公分。($\log 2 = 0.3010\cdots$，$\log 3 = 0.4771\cdots$。)

解：依題意可知：乒乓球的反彈比例是 $48/60 = 4/5$。假設在第 n 次反彈後，其高度低於 6 公分，則可得 $60(4/5)^n < 6$。此式可利用對數求解如下：

$$60(\frac{4}{5})^n < 6，$$

$$(\frac{4}{5})^n < \frac{1}{10}，$$

$$n(\log 5 - \log 4) > 1，$$

$$n(1 - 3\log 2) > 1，$$

$$n > \frac{1}{1 - 3\log 2}。$$

因為 $0.3010 < \log 2 < 0.3011$，所以，$0.0967 < 1 - 3\log 2 < 0.0970$，且

$$10 < \frac{1}{0.0970} < \frac{1}{1 - 3\log 2} < \frac{1}{0.0967} < 11。$$

由此可知：乒乓球在第 11 次反彈後，其高度才會低於 6 公分。‖

2.已知$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=-\frac{4}{5}$，其中$\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，則$\cos(\frac{\pi}{4}+2\alpha)=$_____。

解：因爲$\sin(\pi/4+\alpha)=-4/5$，所以，可得

$$\sin\alpha+\cos\alpha=-4\sqrt{2}/5，$$

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{32}{25}，$$

$$\sin 2\alpha=\frac{7}{25}，\quad \cos 2\alpha=\pm\frac{24}{25}。$$

因爲$5\pi/4<\alpha<3\pi/2$，所以，$5\pi/2<2\alpha<3\pi$，2α在第二象限，所以

$\cos(\frac{\pi}{4}+2\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{24}{25}-\frac{7}{25})=-\frac{31}{25\sqrt{2}}$。||

3.滿足方程組

$$\begin{cases} A+\ \ B+\ \ C=93 \\ \frac{4}{5}A+\frac{5}{6}B+\frac{6}{7}C=79 \end{cases}$$

的正整數組(A,B,C)爲_____。

解：將第二式改寫成$4\cdot6\cdot7A+5\cdot5\cdot7B+5\cdot6\cdot6C=5\cdot6\cdot7\cdot79$。因爲5、6與7兩兩互質以，可知$A$是5的倍數、$B$是6的倍數、$C$是7的倍數。設$A=5k$，$B=6l$，$C=7m$中$k$、$l$與$m$都是正整數。代入原方程組，得

$$\begin{cases} 5k+6l+7m=93 \\ 4k+5l+6m=79 \end{cases}。$$

兩式相減，得

$$k+l+m=14。$$

第三式乘以7、再與第一式相減，即得

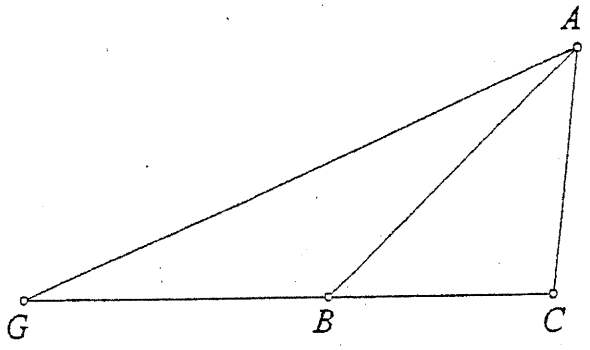
$$2k+l=5。$$

此式只有兩組正整數解：$(k,l)=(1,3)$或$(2,1)$。將兩組解代入前面任一式，可得m分別爲$m=10$或11。因此，原方程組共有兩組正整數解：

$(A,B,C)=(5,18,70)$或$(10,6,77)$。||

4.在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$ 中，$\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{AC}=2$、$\overline{DF}=5$、$\angle B+\angle E=180^\circ$且$\angle C+\angle F=120^\circ$，

則$\overline{BC}+\overline{EF}=$_____。



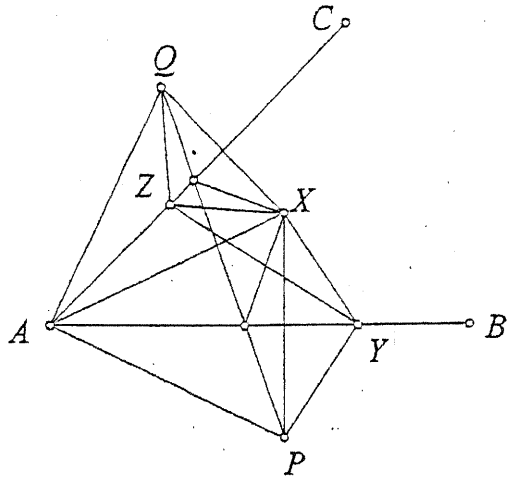
解：在直線BC上選取點G，使得$\overline{BG}=\overline{EF}$且$G$與$C$在$B$的異側。因爲$\overline{AB}=\overline{DE}$、$\overline{BG}=\overline{EF}$且$\angle ABG=180^\circ-\angle ABC=\angle DEF$，所以，$\triangle ABG$與$\triangle DEF$全等。由此可知：$\overline{AG}=\overline{DF}=5$而且$\angle AGB=\angle DFE=120^\circ-\angle ACB$。於是，在$\triangle AGC$中，

$\overline{AC}=2$、$\overline{AG}=5$且$\angle CAG=180^\circ-\angle AGC-\angle ACG=60^\circ$。依餘弦定理，得

$$\begin{aligned}\overline{CG}^2&=\overline{AC}^2+\overline{AG}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{AG}\cos\angle CAG\\&=2^2+5^2-2\cdot2\cdot5\cos60^\circ=19\text{。}\end{aligned}$$

於是，得$\overline{BC}+\overline{EF}=\overline{BC}+\overline{BG}=\overline{CG}=\sqrt{19}$。‖

5.設 $\angle BAC = 45^\circ$，而 X 爲其內部一點且 $\overline{AX} = 6$，在射線 $\overrightarrow{AB}$ 與射線 $\overrightarrow{AC}$ 上分別取異於角頂 A 的一點 Y 與 Z，並使 X、Y、Z 三點不共線，則△XYZ 的周長之最小值爲_____。



解：令點 P 與點 Q 分別表示點 X 對直線 AB 與直線 AC 的對稱點，則 $\overline{XY} = \overline{PY}$ 且 $\overline{ZX} = \overline{ZQ}$。

於是，得

$$\triangle XYZ \text{ 的周長} = \overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = \overline{PY} + \overline{YZ} + \overline{ZQ} \geq \overline{PQ}\text{。}$$

另一方面，因爲點 P 與點 Q 分別表示點 X 對直線 AB 與直線 AC 的對稱點，所以，

$\overline{AP} = \overline{AX} = 6$、$\overline{AQ} = \overline{AX} = 6$、$\angle PAB = \angle BAX$、$\angle CAQ = \angle XAC$，進一步得

$$\angle PAQ = \angle PAB + \angle BAX + \angle XAC + \angle CAQ = 2\angle BAX + 2\angle XAC = 2\angle BAC = 90^\circ\text{。}$$

由此可知△ABC 是直角等腰三角形，$\overline{PQ} = \sqrt{2} \cdot \overline{AP} = 6\sqrt{2}$。‖

6.滿足$1 \le a \le b < c \le d \le 15$的整數組$(a,b,c,d)$共有_____組。。

解：要計算滿足$1 \le a \le b < c \le d \le 15$的所有整數組$(a,b,c,d)$的總數，可以由滿足$1 \le a \le b \le c \le d \le 15$的所有整數組$(a,b,c,d)$的總數中，扣除其中$b=c$的所有整數組$(a,b,c,d)$的總數。

要得出一個滿足$1 \le a \le b \le c \le d \le 15$的整數組$(a,b,c,d)$，只要從 1 至 15 等十五個數中取出 4 個數 (可以重複)。例如：取出 1, 2, 4, 4 時，表示$a=1$、$b=2$、$c=4$、$d=4$。因爲這是重複組合的問題，所以，滿足$1 \le a \le b \le c \le d \le 15$的整數組$(a,b,c,d)$的總數爲$C_4^{15+4-1} = C_4^{18}$。

要得出一個滿足$1 \le a \le b = c \le d \le 15$的整數組$(a,b,c,d)$，只要從 1 至 15 等十五個數中取出 3 個數 (可以重複)。例如：取出 1, 2, 4 時，表示$a=1$、$b=2$、$c=2$、$d=4$。因爲這是重複組合的問題，所以，滿足$1 \le a \le b = c \le d \le 15$的整數組$(a,b,c,d)$的總數爲$C_3^{15+3-1} = C_3^{17}$。

滿足$1 \le a \le b < c \le d \le 15$的所有整數組$(a,b,c,d)$的總數爲

$$C_4^{18} - C_3^{17} = C_4^{17} = 2380 。$$

7.若下列二拋物線的兩交點的連線通過原點，則兩交點坐標爲 _____。

$$y = x^2 + a ，$$

$$y = -x^2 + 4x + 3 。$$

解：將兩拋物線的方程式消去y，即得$2x^2 - 4x + a - 3 = 0$。設此方程式的兩根爲α與β，則得

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = \dfrac{a-3}{2} \end{cases} 。$$

因爲兩拋物線的交點坐標爲$(\alpha, \alpha^2 + a)$與$(\beta, \beta^2 + a)$，所以，其連線的方程式爲$(\alpha+\beta)x - y - \alpha\beta + a = 0$。將$\alpha+\beta$與$\alpha\beta$代入，即得兩交點的連線的方程式爲$4x - 2y + a + 3 = 0$。因爲此直線通過原點，所以，$a = -3$。代入$2x^2 - 4x + a - 3 = 0$即得$2x^2 - 4x - 6 = 0$，解得$x = -1$或$x = 3$。於是，此時兩拋物線的交點坐標爲$(-1,-2)$與$(3,6)$。||