

臺灣省第四區(新竹區)高級中學九十三年學年度數學科能力競賽試題參考解答

競賽試題(一)解答：

1. 將 $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ 記為 $A(n)$ 。

(i) 當 $n=1, 2$ 時， $A(1)=6$ 為 2 的倍數， $A(2)=28$ 為 2^2 的倍數。

(ii) 現假設當 $n=k-1$ 和 k 時原敘述成立，亦即 $A(k-1)$ 為 2^{k-1} 的倍數，而 $A(k)$ 為 2^k 的倍數 ($k \geq 2$)。則當 $n=k+1$ 時， $A(k+1) = 6A(k) + 4A(k-1)$ 可知為 2^{k+1} 的倍數。(這裡利用的公式是 $x^{k+1} + y^{k+1} = (x+y)(x^k + y^k) - xy(x^{k-1} + y^{k-1})$.) 故由數學歸納法原理知原敘述對所有正整數 n 皆成立。

2. $3 - \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$

3. (a) 68 次 (b) 74 次