台灣省第二區九十三學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一) 答案

【問題一】：設 a,b,c 為某三角形之三邊長，試證：

$$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$$ 。（16 分）

【證法一】：展開並簡化此不等式如下：

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 > 2a^4+2b^4+2c^4$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4+c^4-2b^2c^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2 < 0 \qquad \text{---------}（*）$$

因式分解不等式（*），得到

$$[a^2-(b+c)^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]$$

$$=[a+(b+c)]\cdot[a-(b+c)]\cdot[a+(b-c)]\cdot[a-(b-c)]$$

$$=\underset{+}{(a+b+c)}\underset{-}{(a-b-c)}\underset{+}{(a+b-c)}\underset{+}{(a-b+c)} < 0$$

(因為 a,b,c 為任一三角形之三邊長，所以 a,b,c 滿足 $\begin{cases} a+b+c>0 \\ a-b-c<0 \\ a+b-c>0 \\ a-b+c>0 \end{cases}$，不等式得證。)

【證法二】：展開並簡化此不等式如下：

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 > 2a^4+2b^4+2c^4$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4+c^4-2b^2c^2) < 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2 < 0 \qquad \text{---------}（*）$$

由上可知，欲證此不等式成立，即等價於證明不等式（*）成立。

令 $x=a^2$ ，並考慮下列一元二次方程式：

$$x^2-2(b^2+c^2)x+(b^2-c^2)^2=0 \qquad \text{------------}（**）$$

其兩根分別為 $x_1=(b+c)^2$ ，和 $x_2=(b-c)^2$

由觀察不等式（*）和一元二次方程式（**）得知：

不等式（*）成立$\Leftrightarrow (b-c)^2 < x < (b+c)^2$

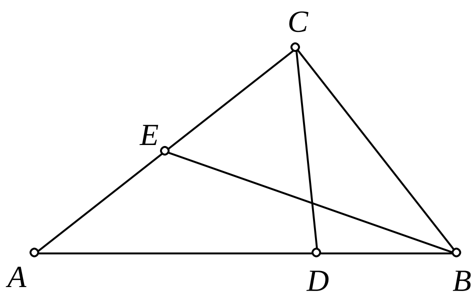
$$\Leftrightarrow (b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2$$

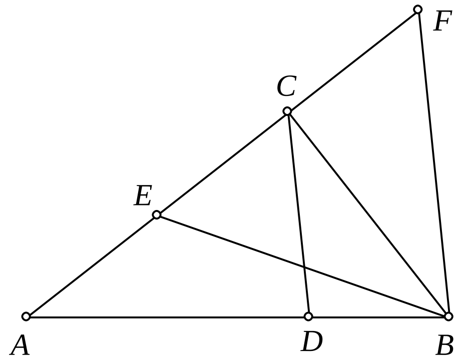
$$\Leftrightarrow |b-c| < a < b+c \qquad \text{---------(***)}$$

因為a,b,c為任一三角形之三邊長，所以（***）必成立。

因此，不等式（*）亦成立，亦即欲證之不等式成立。

【問題二】：在$\triangle ABC$中，點D在$\overline{AB}$上且$\overline{AD}=2\overline{BD}$，又點$E$是$\overline{AC}$的中點。若$\angle ACD=\angle BEC$，試證：$\triangle ABC$是直角三角形。（16 分）

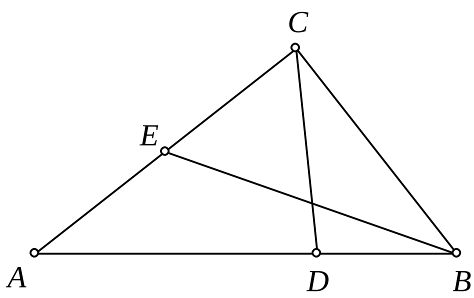


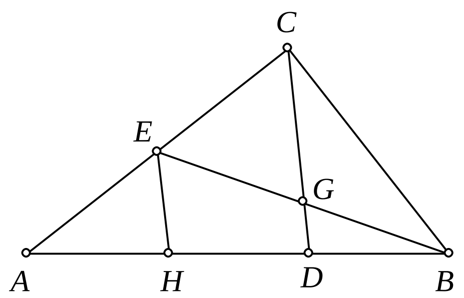


【證法一】：在$\overrightarrow{CA}$的相反射線上選取點F使得$\overline{CF}=\overline{CE}$。在$\triangle ABF$中，因為$\overline{AD}=2\overline{DB}$且$\overline{AC}=2\overline{CF}$，所以，$\overline{CD}$與$\overline{BF}$平行。由此可得$\angle ACD=\angle AFB$。依假設，可得

$$\angle BEF=\angle BEC=\angle ACD=\angle AFB=\angle EFB。$$

由此可知△BEF 是等腰三角形且$\overline{BE}=\overline{BF}$。因為$\overline{BC}$是等腰三角形$\triangle BEF$的底邊$\overline{EF}$上的中線，所以，$\overline{BC}$與$\overline{EF}$垂直，亦即：$\angle ACB$是直角，$\triangle ABC$是直角三角形。 ||

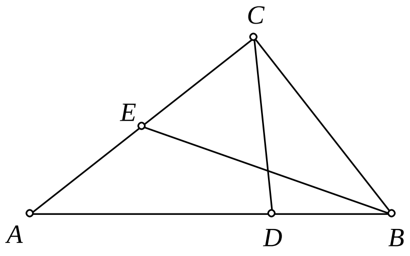


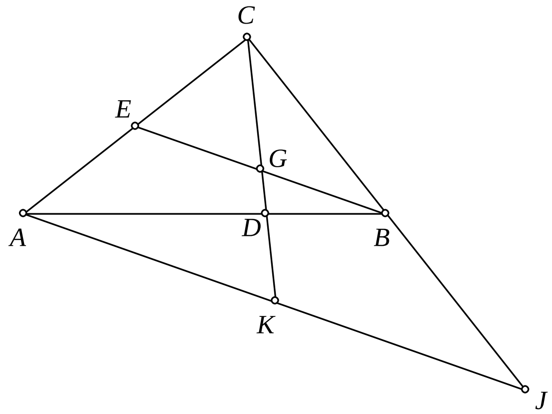


【證法二】：設$\overline{BE}$與$\overline{CD}$相交於點G。過點E作$\overline{CD}$的平行線與$\overline{AB}$相交於點H。因為點E是$\overline{AC}$的中點，所以，點H是$\overline{AB}$的中點。因為$\overline{AD}=2\overline{DB}$，所以，$\overline{DH}=\overline{DB}$，進一步得$\overline{GB}=\overline{GE}$，點$G$是$\overline{BE}$的中點。因為$\angle ACD=\angle BEC$，所以，$\overline{GE}=\overline{GC}$。由此得$\overline{GB}=\overline{GC}$及$\angle GBC=\angle GCB$。因此，得

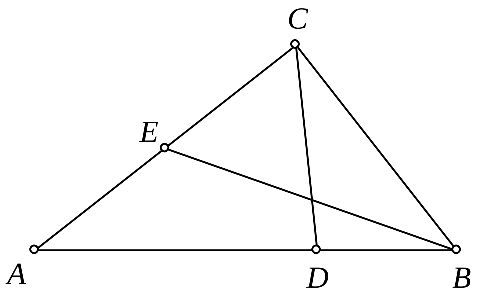
$$\angle ACB=\angle GCE+\angle GCB=\frac{1}{2}(\angle GCE+\angle GEC)+\frac{1}{2}(\angle GCB+\angle GBC)$$

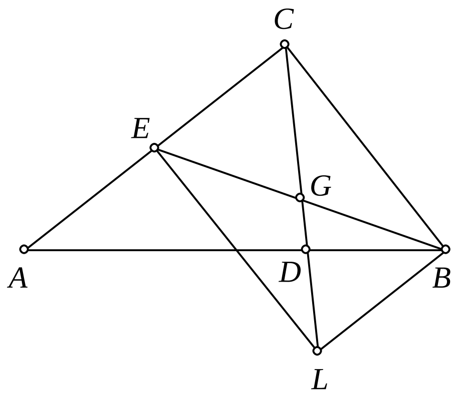
$$=\frac{1}{2}(\angle BCE+\angle CEB+\angle EBC)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ。 ||$$





【證法三】：設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於點 G。在 $\overrightarrow{BC}$ 的相反射線上選取點 J 使得 $\overline{BC}=\overline{BJ}$ ，設 $\overline{AJ}$ 與直線 CD 相交於點 K。因為 $\overline{AB}$ 是$\triangle ACJ$ 的一條中線，而且 $\overline{AD}=2\overline{DB}$，所以，點 D 是$\triangle ACJ$ 的重心。於是， $\overline{CK}$ 是$\triangle ACJ$ 的另一條中線，點 K 是 $\overline{AJ}$ 的中點。因為 B 與 E 分別為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{CJ}$ 的中點，所以， $\overline{BE}$ 與 $\overline{AJ}$ 平行。於是，由 $\overline{AK}=\overline{KJ}$ 可得 $\overline{GB}=\overline{GE}$ ，點 G 是 $\overline{BE}$ 的中點。 ||

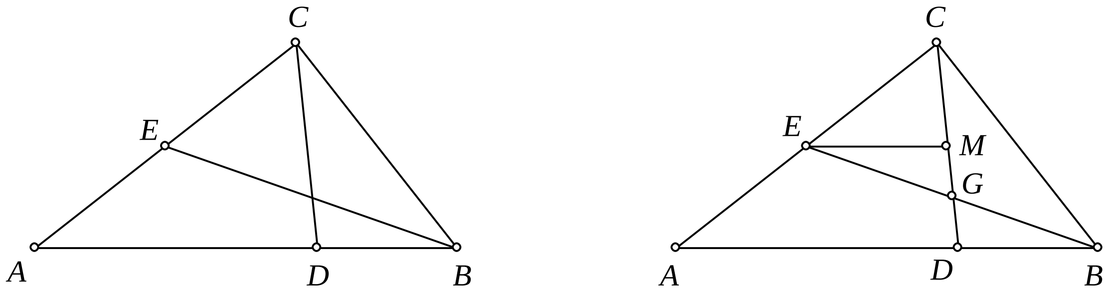




【證法四】：設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於點 G。過點 B 作 $\overline{AC}$ 的平行線與直線 CD 相交於點 L。因為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BL}$ 平行，所以，$\triangle ACD$ 與$\triangle BLD$ 相似。於是，由 $\overline{AD}=2\overline{DB}$ 可得 $\overline{AC}=2\overline{BL}$。由此可知：

$$\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{BL} \text{ 。}$$

因為四邊形 $BCEL$ 有一組對邊平行且等長，所以，$BCEL$ 是平行四邊形。於是，兩對角線 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CL}$ 的交點 G 是 $\overline{BE}$ 的中點， $\overline{GB}=\overline{GE}$ 。 ||



【證法五】: 設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 相交於點 G。過點 E 作 $\overline{AB}$ 的平行線與 $\overline{CD}$ 相交於點 M。因為點 E 是 $\overline{AC}$ 的中點，所以，點 M 是 $\overline{CD}$ 的中點而且 $\overline{AD}=2\overline{EM}$ 。因為 $\overline{AD}=2\overline{DB}$ ，所以， $\overline{EM}=\overline{DB}$ 。因為四邊形 $BDEM$ 有一組對邊平行且等長，所以，$BDEM$ 是平行四邊形。於是，兩對角線 $\overline{BE}$ 與 $\overline{DM}$ 的交點 G 是 $\overline{BE}$ 的中點，$\overline{GB}=\overline{GE}$ 。 ||

【問題三】：設 n 為自然數，試證：在任意 3^n 個正整數中，必存在 2^n 個數的和是 2^n 的倍數。（17 分）

解：

(i) 當 $n=1$ 時，在任意 3 個正整數 x,y,z 中，必有兩個數有相同的奇偶性，其和為 2 的倍數。

(ii) 當 $n=k$ 時，假設命題成立，即：在任意 3^k 個正整數中，必存在 2^k 個數，其和是 2^k 的倍數。

當 $n=k+1$ 時，對任意 3^{k+1} 個正整數，先平分成三堆，每一推各有 3^k 個正整數。依歸納假設，每堆各存在 2^k 個數，其和是 2^k 的倍數。
可設第一堆中的 2^k 個數之和為 $S_1=2^k x$，第二堆中的 2^k 個數之和為 $S_2=2^k y$，第三堆中的 2^k 個數之和為 $S_3=2^k z$，其中 x,y,z 為正整數。
因 x,y,z 中，必有兩個數有相同的奇偶性；不失一般性，設 x,y 同為奇數或同為偶數，則 $x+y$ 是 2 的倍數，可令 $x+y=2m$。
因此，第一堆和第二堆中，一共找出的 $2^k+2^k=2^{k+1}$ 個數之和等於 $S_1+S_2=2^k x+2^k y=2^{k+1}m$ 為 2^{k+1} 的倍數。得證。