

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
南區 (高雄中學) 筆試(一)試題

1、在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ 且 $BC = a$ ， $CA = b$ ， $AB = c$ 。若 x 不論為任何實數，皆能使 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 成立，求 $\angle A$ 的最大可能角度值？

2、在 xy 平面上，有圓過 $A(0,3)$ ， $B(12,-6)$ 兩點，且與 x 軸交於兩相異點 P 、 Q 。試求：

(a) \overline{PQ} 線段長之最小值。

(b) 當 \overline{PQ} 線段長為最小值時，該圓圓心座標。

3、迷宮入口處有向右、向左、向前三條路，其機率相同。若向右走，平均經過5分鐘，將回到入口處；若向左走，則平均經過8分鐘，就走出迷宮；若向前走，經過1分鐘後，有左、右兩條路。向左和向右的機率相同下，向左走，平均經過6分鐘，就走出迷宮；而向右走則經過2分鐘後，又回到入口處。平均而言，試問走一趟迷宮需多少時間？

4、若方程式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 之相異三根為 a ， b ， c 。試證：

$$\frac{a^{2004} - b^{2004}}{a - b} + \frac{b^{2004} - c^{2004}}{b - c} + \frac{c^{2004} - a^{2004}}{c - a} \text{ 為整數}$$

5、(1) 證明： $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ 。

(2) 如果 $\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} + \theta$ ，求 θ 。

(3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \dots + \tan^{-1} \frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$ 。