

九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區 (屏東中學) 筆試(二)【參考解答】

參考解答：

$$1. \text{ 令 } y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - x + 1}, \text{ 則 } (y-1)x^2 - (y-3)x + y-3 = 0$$

$$\text{判別式 } D \geq 0, (y-3)^2 - 4(y-1)(y-3) \geq 0$$

$$(y-3)(3y-1) \geq 0, \frac{1}{3} \leq y \leq 3$$

所以 最大值為 3，最小值為 1/3

$$2. \text{ 因為 } yz = x^2 - 8x + 7 \text{ 且 } y^2 + z^2 \geq 2yz$$

所以

$$0 = y^2 + z^2 + yz - 6x + 6 \geq 3yz - 6x + 6 = 3(x^2 - 8x + 7) - 6x + 6 = 3(x^2 - 10x + 9)$$

$$0 \geq (x-9)(x-1) \text{ 故 } 1 \leq x \leq 9$$

$$3. \sin 18^\circ + \sin x = \cos(30^\circ - 18^\circ)$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 18^\circ - \frac{1}{2} \sin 18^\circ = \sin 42^\circ = \sin(42^\circ + 360^\circ \times n)$$

所以 x 最小的正度數為 42 度

$$4. \text{ 原式} = n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n = n(n^3 + 2n^2 + 11n + 10) = n(n+1)(n^2 + n + 10)$$

$$\text{原式} = n(n+1)(n^2 + n - 2 + 12) = n(n+1)(n-1)(n+2) + 12n(n+1)$$

$$\therefore 24 \mid (n-1)n(n+1)(n+2) \text{ 且 } 2 \mid n(n+1) \Rightarrow 24 \mid 12n(n+1)$$

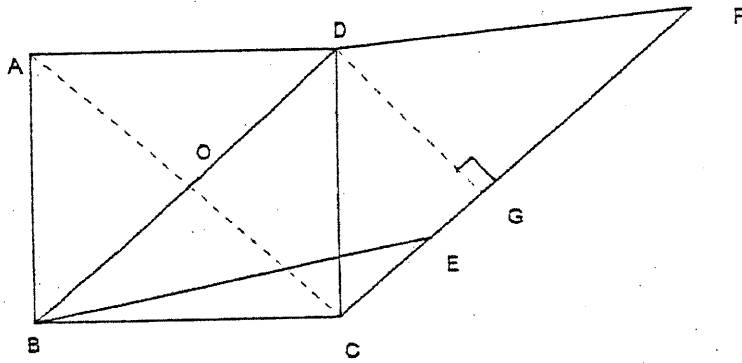
$$\therefore 24 \mid (n^4 + 2n^3 + 11n^2 + 10n)$$

$$5. \text{ (i) 設 } p=3k+1 \Rightarrow p+56=3(k+19) \text{ (不合) (因為 } p+56 \text{ 是質數)}$$

$$\text{(ii) 設 } p=3k-1 \Rightarrow p+28=3(k+9) \text{ (不合) (因為 } p+28 \text{ 是質數)}$$

由 (i) 及 (ii) 可知 $p=3k$ 且 p 為質數 所以 $p=3$

6. 連接 \overline{AC} ，交 \overline{BD} 於 O 點，過 D 點作 $\overline{DG} \perp \overline{CF}$ 於 G 點



因為 ABCD 為正方形，

所以 $\angle BOC = \angle COD = 90^\circ$, $\overline{OC} = \overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{DF} = \overline{DG}$

因此 $\angle F = 30^\circ$ ，故 $\angle BDF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ = 5\angle F$ n=5