

# 九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

## 北區 第三區(建國中學)

編號：\_\_\_\_\_

注意事項：

- (1)時間分配：2小時。
- (2)配分：滿分49分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：已知一元二次方程式  $ax^2 - 2bx + 2c = 0$  有兩個相異實根都介於2與3之間，又  $a > 0$ 。試證下述兩個不等式成立：

(1)  $b < c < \frac{3}{2}a + b$ 。(6分)

(2)  $\frac{3a}{4a+2c} + \frac{b}{2a+b} > \frac{c}{b+c}$ 。(6分)

[問題二]：給定一銳角三角形  $\triangle ABC$ ，其中  $\angle A > 45^\circ$ 、 $\angle B > 45^\circ$ 。設  $\overline{AM}$  與  $\overline{BN}$  分別表示  $\triangle ABC$  過頂點  $A$  與  $B$  的高，而  $D$  與  $E$  分別為射線  $\overline{MA}$  與  $\overline{NB}$  上滿足  $\overline{MD} = \overline{MB}$  與  $\overline{NE} = \overline{NA}$  的兩點。試證： $\overline{DE}$  與  $\overline{MN}$  平行。(12分)

[問題三]：試求出能使  $n^4 + 4^n$  為質數的所有正整數  $n$ 。(12分)

[問題四]：有多少個多項式  $f(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$  同時滿足下面兩個條件？(13分)

- (1)  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  是集合  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  中的七個相異元素；
- (2)  $f(x)$  可被  $x^3 + x^2 + x + 1$  整除。