

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(台南一中)

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1小時。
- (2)本試卷共四題，滿分21分，第一題5分，第二題6分，第三題5分，第四題5分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

1.請詳細說明下列這兩個數

$$(1.0000001)^{10000000}, 2$$

哪一個大？

2.設 α 為接近於 $\sqrt{2}$ 之正有理數且 $\beta = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ 。

- (1)試證 $\sqrt{2}$ 介於 α 與 β 之間。
- (2) α 與 β 二數何者較接近 $\sqrt{2}$ ？為什麼？

3.令 $P(z) = 200z^5 + 201z^4 + 202z^3 + 203z^2 + 204z + 205 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ 。證明： $P(z) = 0$ 在 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 中沒有任何解，其中 \mathbb{C} 表所有複數。

4.對所有大於1的整數 n ，設 $S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n$ 且 $T_n = \frac{S_2}{S_2-1} \cdot \frac{S_3}{S_3-1} \cdot \frac{S_4}{S_4-1} \cdots$

$\frac{S_n}{S_n-1}$ ，試求 T_{2003} 之值。