

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)
(台南一中)

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：2小時。
- (2)本試卷共四題，滿分49分，第一題13分，第二題12分，第三題12分，第四題12分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：投擲一枚公正的錢幣 $2n$ 次，證明出現正面的次數至少為 n 次的機率為

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \binom{2n}{n}$$

[問題二]：請問對於所有的實數 x ， $\sin(\cos x)$, $\cos(\sin x)$ 哪一個大？(請詳細證明)

[問題三]：設 $p(x)$ 為整係數多項式，且滿足 $p(m_1)=p(m_2)=p(m_3)=p(m_4)=13$ 。這裡 m_1, m_2, m_3, m_4 是給定相異整數。證明沒有整數 m ，使 $p(m)=20$ 。

[問題四]：設 $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2$ 且對任一正整數 n 都有 $f(3n)=f(n), f(3n+1)=f(n)+1, f(3n+2)=f(n)-1$ ，試求 $f(3721)$ 之值。