十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

北區 第四區(新竹高中)

編號：______

注意事項：

(1)時間分配：1 小時。

(2)配分：滿分 21 分，每題 3.5 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

1. 設有兩圓內切，通過小圓的圓心作一直線 A-B-C-D，分別交大圓於 A、D，交小圓 B、C，若 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}=2:6:5$，則小圓與大圓半徑的比值為 ___(1)___。

2. 已知函數 f 滿足：$f(14)=14$, $f(26)=26$，且當質數 p 與 q 滿足 $p>q\geqq 2$ 時，$f(pq)=f(p)-f(q)+p+q$。則 $f(91)=$ ___(2)___。

3. 在$\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上的中點，$\triangle ABD$ 的內切圓與中線 AD 相切於 M，$\triangle ACD$ 的內切圓與中線 AD 相切於 N。若 $\overline{AB}=15$, $\overline{AC}=10$，則線段 $\overline{MN}=$ ___(3)___。

4. 平面上過點 $(3,0)$ 且與橢圓 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相切的兩條直線所夾成的銳角為 θ。則 $\tan\theta=$ ___(4)___。

5. 設正數 a, b 滿足 $2ab+3a+6b=27$，則 a^2+4b^2 的最小值為 ___(5)___。

6. 設 $f(x)$ 為有理係數的三次多項式，$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5$，且對任意正整數 n，$f(n)$ 都是正整數。則 $f(10)$ 的最小可能值為 ___(6)___。