

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

北區 第四區(新竹高中)

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：2小時。
- (2)配分：滿分49分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：在坐標平面上給定一點 $A(2, 5)$ ，試在直線 $y = x$ 上找一點 P ，使得 $\overline{AP} - \overline{PQ}$ 為最小，其中 Q 為 P 在直線 $2x - 5y = 0$ 上的垂足。請求出 P 點的坐標，並證明之。

[問題二]：試求出所有的正整數 a, b ，使得 $\frac{a^2 + b}{ab + 1}$ 為正整數。

[問題三]：將 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{48}$ 依順時針方向排列在一圓周上，其中 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{48}$ 為 $1, 2, 3, \dots, 48$ 的一種排列。設 $f(n)$ 表示圓周上從第 n 個數 a_n 開始依順時針方向連續的16個數中是偶數的個數。

(a) 試證： $f(1) f(2) \cdots f(48) \leq 2^{144}$ ；

(b) 試證：必有一整數 $k \in \{1, 2, 3, \dots, 48\}$ 使得 $f(k) = 8$ 。