

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(高雄中學)

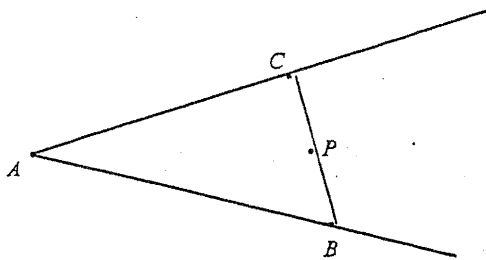
編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1小時。
- (2)本試卷共五題，滿分100分，第一題20分，第二題20分，第三題(a)10分(b)10分，第四題20分，第五題(a)10分(b)10分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

1. 一函數 $f: N \rightarrow R$ ，已知 $f(1) = 1$ ， $f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} [(k+2)f(k) + k+1]$ ， $n > 1$ ；試求 $f(100) = ?$

2. 在 $\angle A$ 內有一個固定點 P ，自 P 點任意作一直線交 $\angle A$ 兩邊於 B 點與 C 點。試求 $\frac{AB}{BP} + \frac{AC}{CP}$ 的最大值。



3. (a) 試求 $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ 之值。

(b) 試問方程式 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 2003$ 有多少組不同的正整數解？

4. 甲乙丙三人分別帶著他們的妻子方女士、吳女士及曾女士到百貨公司購物；如果用 A, B, C 表示三位女士，至於 A 是誰， B 是誰， C 是誰，目前尚不知道。已知他們 6 人，每人花在買商品的金額等於所購商品件數的平方；而且每位丈夫比自己的妻子多花 48 美元，若乙比 C 多買 7 件，丙比 B 多買 9 件；請問方女士、吳女士及曾女士分別是 A, B, C 中的哪一位？

5. (a) 若 a, b 是正整數，且滿足

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{4}{49}$$

試求 $a+b$ 之值。

(b) 試問 $20! = 20 \times 19 \times \dots \times 2 \times 1$ 乘開之後最後一個非零的數字為何？