九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

(高雄中學)

[問題一]：m,n 為正整數；試證該兩數的乘積 mn 為偶數的充要條件為存在二非負整數 p,q 使得 $m^2+n^2+p^2=q^2$。

【參考解答】：首先證明：若 mn 爲偶，則存在非負整數 p,q 滿足 $m^2+n^2+p^2=q^2$。
首先假設 m,n 其中一者爲奇，在不失一般性下，可設 m 爲奇，n 爲偶，
此時 m^2+n^2 是一正奇數，則取

$$p=\frac{m^2+n^2-1}{2}\text{，}q=\frac{m^2+n^2-1}{2}$$

，且知 p,q 均爲非負整數，

則 $q^2-p^2=(q+p)(q-p)=m^2+n^2$，即 $m^2+n^2+p^2=q^2$。
若 m,n 皆爲偶，則 m^2+n^2 是 4 的倍數，此時令

$$p=\frac{m^2+n^2}{4}-1\text{，}q=\frac{m^2+n^2}{4}+1$$

，且知 p,q 均爲非負整數，

則 $q^2-p^2=(q+p)(q-p)=\dfrac{m^2+n^2}{2}\cdot 2=m^2+n^2$，得證。
反之，若 mn 爲奇，則 m,n 皆爲奇，此時存在 $a,b\in N$ 滿足 $m=2a-1,n=2b-1$，
則 $m^2+n^2=(2a-1)^2+(2b-1)^2=4(a^2+b^2-a-b)+2$
故 $m^2+n^2\equiv 2\pmod 4$，而正整數的完全平方數模 4 只可能是 0 或 1(奇數平方模 4 是 1，偶數平方模 4 是 0)，
故不論 p,q 爲任何非負整數，都不能滿足 $q^2-p^2\equiv m^2+n^2\equiv 2\pmod 4$，從而不可能 $m^2+n^2+p^2=q^2$，
因此 $m^2+n^2+p^2=q^2\Rightarrow mn$ 爲偶，證畢。

[問題二]：設集合 $S=\{1,2,3,\cdots,100\}$，在這 100 個數中，先將這些數中是 2 的倍數乘以 i，其中 $i=\sqrt{-1}$；之後，再將這些數中是 3 的倍數及虛部是 3 的倍數的複數乘以 i；現在從經過上述兩次處理後的 100 個數中任意挑選 3 個相異的數，並將這 3 個數加起來令其和為 a_k。試求所有這種 3 個相異數和 a_k 的總和。

【參考解答】：將 S 中的數分爲三種：

a. $\{1,5,7,11,\cdots,97\}$ 這些形如 $6n+1$, $6n+5$ 的數，這些數在兩次處理後仍不變。
b. $\{2,3,4,8,9,10,\cdots,98,99,100\}$ 形如 $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$ 的數，這些數在兩次處理後會乘上 i。

c. $\{6, 12, \cdots, 96\}$這些形如$6n$的數，經兩次處理後變成相反數。

不論是任一種狀況，經兩次處理後其大小不變，而原S中的100個數大小皆不同，因此經處理後之所有數皆相異，令S經兩次處理後成爲S'，在S'取3個相異數的取法有$C_3^{100}=\frac{100\cdot 99\cdot 98}{6}$種，每一種會選3個數，因此選了$100\cdot\frac{99\cdot 98}{2}$個數，由於上述動作皆不失一般性，故每一數各取了$\frac{99\cdot 98}{2}$次，因此其總和等於

$\frac{99\cdot 98}{2}\sum_{X\in S'}X$，其中

$\sum_{X\in S'}X=(1+5+7+11+\cdots+91+95+97)+i\,(2+3+4+8+9+10+\cdots+98+99+100)-$
$(6+12+18+\cdots+96)=1536+97+2601\,i-816$，故總和$=4851(817+2061\,i)$

[問題三]：設n為正整數，若數字1有$5n+1$個，數字2有n個，數字3有n個；今將這$7n+1$個數字排成一排，試證：一定可以在所排成一排的數字中找到一個數字1，使得該數字1左邊所有數字1的總和等於左邊其他數字的總和。

（當然，在此特定數字1的右邊也有此性質）

【參考解答】：首先，若最左邊的數是1，則該數即符合本題所述的性質，因此我們可假設最右邊的數不是1，同樣地，我們可以假設最左邊的數亦不是1，現在定義一個1的值爲這個1左邊的數1的總和減去其他數字的總和，而以下將證明存在一個1，它的值爲0。

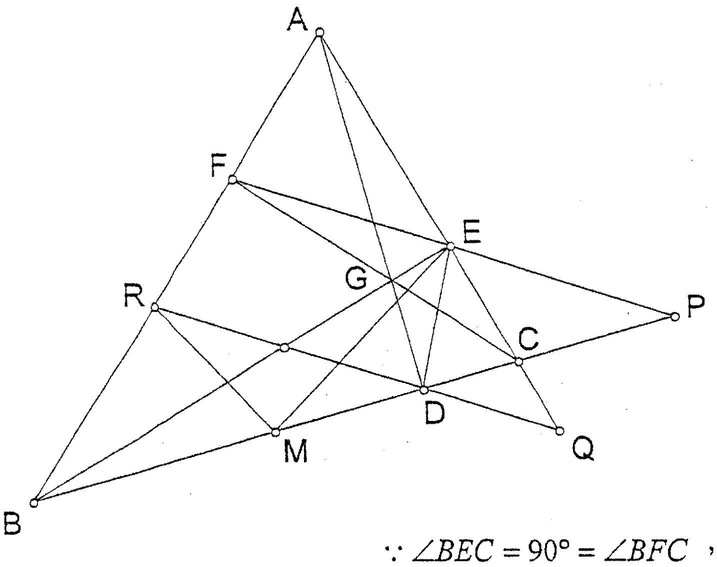
首先我們觀察最左邊的1，他的值必然是負的(因爲它的左邊沒有了1，但根據我們的假設，他左邊仍有其他的數)，而最右邊那個1，它的值必然是正的(因爲所有的1都在它的左邊，但根據假設，並非所有的2，3都在它左邊)，現在我們找出所有値爲負的1中(至少有一個，即最左邊的)，最右邊的一個令它爲I，由於這個1並不是所有1中最右邊的(因最右邊的爲正)，故它必然還有一個在它右邊的1，令那個1爲J，(這裡的右邊指的是右邊的所有1中最靠近的)，以下證明$S=0$

(以下V_I, V_J表I, J的值)

首先若I, J中有任何2或3存在，$V_J\le V_I+1-2<0$，與I的定義矛盾，故I, J爲相鄰的兩個1，此時$V_J=V_I+1$，由於V_J須≥ 0，故有$V_I=-1, V_J=0$，得證。

[問題四]：設三角形ABC為銳角三角形，其中$\overline{AB}>\overline{AC}$，今從三頂點$A, B, C$所作$\Delta ABC$的三高在其對邊的垂足分別為$D, E, F$；過$D$作$\overline{EF}$的平行線，分別交直線$AB$於$Q$和$R$；而直線$EF$交直線$BC$於$P$。試證$\Delta PQR$的外接圓通過線段$\overline{BC}$的中點。

【参考解答】:



設 $\overline{BC}$ 中點爲 M ，$\overline{CM}=\overline{BM}$

要證 $PQMR$ 共圓

$\Leftrightarrow \overline{PD}\cdot\overline{DM}=\overline{DQ}\cdot\overline{DR}$ ...(1)

$\because \overline{RQ}$ 平行 $\overline{FP}$，故

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{EP}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{PC}},\frac{\overline{DR}}{\overline{FP}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BP}}$$

$$\Rightarrow \overline{DQ}=\frac{\overline{EP}\cdot\overline{CD}}{\overline{PC}},\overline{DR}=\frac{\overline{FP}\cdot\overline{BD}}{\overline{BP}}$$

由(1)

$$\overline{PD}\cdot\overline{DM}=\frac{\overline{EP}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{FP}\cdot\overline{BD}}{\overline{PC}\cdot\overline{BP}}\cdots(2)$$

$\because \angle BEC=90^\circ=\angle BFC$ ，$\therefore EFBC$ 共圓 $\Rightarrow \overline{PE}\cdot\overline{PF}=\overline{PC}\cdot\overline{PB}$

由(2) $\quad \overline{PD}\cdot\overline{DM}=\overline{CD}\cdot\overline{BD}$

$\Leftrightarrow (\overline{PM}-\overline{DM})\,\overline{DM}=(\overline{CM}-\overline{DM})\,(\overline{BM}+\overline{DM})=(\overline{BM}-\overline{DM})\,(\overline{BM}+\overline{DM})$

$\Leftrightarrow \overline{PM}\cdot\overline{DM}-\overline{DM}^2=\overline{BM}^2-\overline{DM}^2$

$\Leftrightarrow \overline{PM}\cdot\overline{DM}=\overline{BM}^2 \Leftrightarrow \overline{PM}\cdot\overline{DM}=\overline{ME}^2$ ($\because \overline{BM}=\overline{ME}$) $\cdots$(3)

$\because \angle GEC+\angle GDC=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\therefore GDCE$ 共圓，同理 $FGDB$ 共圓，又 $EFBC$ 共圓

$\Rightarrow \angle EDG=\angle GCE=\angle GBF=\angle ABC-\angle EBM=\angle ABC-\angle BEM$

$\Rightarrow \angle EDM=90^\circ+\angle EDG=90^\circ+\angle ABC-\angle BEM=90^\circ+\angle PEC-\angle BEM=\angle MEP$

又 $\angle EMD=\angle PME$

$\therefore \Delta MED\sim\Delta MPE$

$\Rightarrow \frac{\overline{ME}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{ME}}\Rightarrow \overline{MD}\cdot\overline{MP}=\overline{ME}^2$ 此式成立。

此式即爲(3)式，$\because$ 推理步步可逆故得證。