

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

(高雄中學)

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：2小時。
- (2)本試卷共四題，滿分100分，第一題25分，第二題25分，第三題25分，第四題25分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]： m, n 為正整數；試證該兩數的乘積 mn 為偶數的充要條件為存在二非負整數 p, q 使得 $m^2 + n^2 + p^2 = q^2$ 。

[問題二]：設集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ ，在這100個數中，先將這些數中是2的倍數乘以 i ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ；之後，再將這些數中是3的倍數及虛部是3的倍數的複數乘以 i ；現在從經過上述兩次處理後的100個數中任意挑選3個相異的數，並將這3個數加起來令其和為 a_k 。試求所有這種3個相異數和 a_k 的總和。

[問題三]：設 n 為正整數，若數字1有 $5n+1$ 個，數字2有 n 個，數字3有 n 個；今將這 $7n+1$ 個數字排成一排，試證：一定可以在所排成一排的數字中找到一個數字1，使得該數字1左邊所有數字1的總和等於左邊其他數字的總和。

(當然，在此特定數字1的右邊也有此性質)

[問題四]：設三角形 ABC 為銳角三角形，其中 $\overline{AB} > \overline{AC}$ ，今從三頂點 A, B, C 所作 $\triangle ABC$ 的三高在其對邊的垂足分別為 D, E, F ；過 D 作 \overline{EF} 的平行線，分別交直線 AB 於 Q 和 R ；而直線 EF 交直線 BC 於 P 。試證 $\triangle PQR$ 的外接圓通過線段 BC 的中點。