九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)參考解答

（屏東高中）

[問題一]：試求最小的質數n，使得$\dfrac{100!}{(n!)^2}$不為整數。

【參考解答】：$C_n^{2n}=\dfrac{(2n!)}{(n!)(n!)}=\dfrac{(2n!)}{(n!)^2}$爲一正整數，則知$\dfrac{(100!)}{(50!)^2}$仍爲一整數，故$n>50$

考慮$n=53$

$53!$中，53 倍數有 1 個，因此$53^2\mid(53!)^2$

而$100!$中，53 倍數只有 1 個，因此$53\mid 100!$ 但$53^2\nmid 100!$

故當$n=53$時使原式不爲整數。

[問題二]：設a_n表示3^n的個位數字，試求$a_1+a_2+\cdots+a_{2002}+a_{2003}$之值。

【參考解答】：

$$\begin{array}{ll} n=1 & a_1=3 \\ n=2 & a_2=9 \\ n=3 & a_3=7 \\ n=4 & a_4=1 \\ n=5 & a_5=3 \\ & \vdots \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2003\div 4=500\ldots 3 \\ \therefore (3+9+7+1)\times 500+3+9+7 \\ =10000+19=10019 \end{array}$$

[問題三]：設p,q,r為介於 0 與 1 之間的三個實數，試證在 0 與 1 之間存在一個實數x使得$\dfrac{1}{|x-p|}+\dfrac{1}{|x-q|}+\dfrac{1}{|x-r|}<20$

【參考解答】：首先將$[0,1]$區間等分成 6 塊區域，每塊區域寬度是$1/6$

我們將I_i定義爲區間$[(i-1)/6,\, i/6]$，即

$I_1=[0,1/6], I_2=[1/6,2/6], I_3=[2/6,3/6],\cdots, I_6=[5/6,1]$

情形一：當p,q,r三點都落於同一區間，以表格說明

第一欄係指所位於的區間，第二係指x値所取的區間

p,q,r所在區間	x所取的區間	p,q,r所在區間	x所取的區間
I_1	I_3	I_4	I_1

I_2	I_4	I_5	I_2
I_3	I_6	I_6	I_3

情形二：當 p, q, r 三點分別落於不同的二個區間內，則

p, q, r 所在區間	x 所取的區間	p, q, r 所在區間	x 所取的區間
I_1, I_2	I_4	I_2, I_4	I_6
I_1, I_3	I_5	I_2, I_5	$x = 3/6$
I_1, I_4	I_6	I_2, I_6	I_4
I_1, I_5	I_3	I_3, I_4	I_1
I_1, I_6	I_3	I_3, I_5	I_1
I_2, I_3	I_5	I_3, I_6	I_1
I_4, I_5	I_1	I_5, I_6	I_1
I_4, I_6	I_1		

情形三：當 p, q, r 三點分別落於不同區間

p, q, r 所在區間	x 所取的區間	p, q, r 所在區間	x 所取的區間
I_1, I_2, I_3	I_6	I_2, I_3, I_4	I_6
I_1, I_2, I_4	I_6	I_2, I_3, I_5	$x = 1$
I_1, I_2, I_5	$x = 3/6$	I_2, I_3, I_6	$x = 4/6$
I_1, I_2, I_6	I_4	I_2, I_4, I_5	$x = 1$
I_1, I_3, I_4	I_6	I_2, I_4, I_6	$x = 0$
I_1, I_3, I_5	$x = 1$	I_2, I_5, I_6	$x = 3/6$
I_1, I_3, I_6	$x = 4/6$	I_3, I_4, I_5	I_1
I_1, I_4, I_5	$x = 2/6$	I_3, I_4, I_6	I_1
I_1, I_4, I_6	$x = 2/6$	I_3, I_5, I_6	I_1
I_1, I_5, I_6	I_3	I_4, I_5, I_6	I_1

此時 $|x-p| > \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{|x-p|} < 6$，同理 $\dfrac{1}{|x-q|} < 6$, $\dfrac{1}{|x-r|} < 6$

故存在 x 於 $[0,1]$ 中，使得 $\dfrac{1}{|x-p|} + \dfrac{1}{|x-q|} + \dfrac{1}{|x-r|} < 6+6+6 = 18 < 20$

[問題四]：試求滿足方程式 $(y+1)^2 = x^4 + 20x^3 + 104x^2 + 40x + 2004$ 的所有整數解 (x, y)

【參考解答】：$(y+1)^2 = (x^2 + 10x + 2)^2 + 2000$

$(y+1)^2-(x^2+10x+2)^2=2000$

$(y+1+x^2+10x+2)(y+1-x^2-10x-2)=2000$

令$u=y+1+x^2+10x+2$，$v=y+1-x^2-10x-2$

則$u+v=2y+2$為一偶數，且$uv=2000$亦為偶數，故u,v均為偶數。

而$u-v=t=2x^2+20x+2$要有整數解，則$2x^2+20x+2-t=0$要有整數解，

故此一元二次方程式之判別式$10^2-2(2-t)=96+2t$為一完全平方數。$t>-48$

u	1000	500	250	200	100	50
v	2	4	8	10	20	40
$u+v$	1002	504	258	210	120	90
$u-v=t$	998	496	242	190	80	10
$96+2t$	2092	1088	580	476	256	116
(x, y)					(3, 59) (−13, 59)	

u	40	-20				
v	50	-100				
$u+v$	90	-120				
$u-v=t$	-10	80				
$96+2t$	76	256				
(x, y)		(3, −61) (−13, −61)				

故得到四組整數解。

[問題五]：直線L上有兩相異固定點B與C，已知B與C相距d單位；直線L外有一平行線M，兩線相距h單位；已知點A為直線M上的一點且A可以在直線M上自由移動。設A,B,C三點形成一個三角形ABC。

(a)試證：ΔABC的內切圓面積最大時，則ΔABC是一個等腰三角形。

(b)若$d=6, h=4$，試求ΔABC的最大內切圓面積。

【參考解答】：

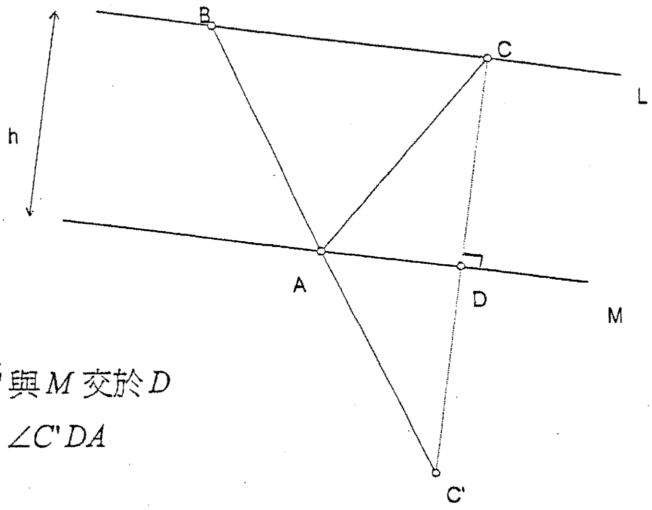
(a) 設內切圓半徑r，ΔABC三邊長為a, b, c

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}dh=\frac{1}{2}r(a+b+c)\Rightarrow r=\frac{dh}{a+b+c}$$

ΔABC周長最小時，內切圓面積最大

$\therefore \Delta ABC$為等腰時，周長最小

pf:



如圖，作C對M之對稱點C'，$\overline{CC'}$與M交於D

則$\because \overline{CD}=\overline{DC'}, \overline{AD}=\overline{AD}, \angle CDA=\angle C'DA$

$\therefore \triangle CDA \cong \triangle C'DA \qquad \therefore \overline{AC}=\overline{AC'}$

$\therefore \triangle ABC$之周長$=\overline{AB}+\overline{AC}+d=\overline{AB}+\overline{AC'}+d$

$\therefore$當A為$\overline{BC'}$與M之交點時，周長最小，此時，

$\because \angle CBA+\angle BCD+\angle AC'D=180^\circ \qquad \therefore \angle CBA+\angle AC'D=90^\circ$

又$\angle BCA+\angle ACD=90^\circ, \angle ACD=\angle AC'D$

$\therefore \angle CBA=\angle BCA \qquad \therefore \triangle ABC$為等腰三角形。

(b) 當$\triangle ABC$為等腰時，$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore$周長$=5+5+6=16$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 4=\frac{1}{2}\times 16r \Rightarrow r=\frac{3}{2} \qquad \therefore$最大內切圓面積$=\frac{9}{4}\pi$

[問題六]：設$a,b,c>0$，且$abc=8$。試證：$\frac{1}{2+a+b}+\frac{1}{2+b+c}+\frac{1}{2+c+a}\le\frac{1}{2}$

【參考解答】：$a=x^3, b=y^3, c=z^3$，$abc=8\Rightarrow xyz=2$

因為$x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy\ge xy$

$$故\frac{1}{2+a+b}=\frac{1}{2+(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

$$\le\frac{1}{2+(x+y)xy}=\frac{(xyz/2)}{xyz+(x+y)xy}=\frac{(z/2)}{z+x+y}$$

$$同理，\frac{1}{2+b+c}\le\frac{(x/2)}{x+y+z}, \frac{1}{2+a+c}\le\frac{(y/2)}{y+x+z}$$

$$故\frac{1}{2+a+b}+\frac{1}{2+b+c}+\frac{1}{2+c+a}\le\frac{1}{2}\left[\frac{x+y+z}{x+y+z}\right]=\frac{1}{2}$$