

屏東區數學試題（一）

1. 試求最小的質數 n ，使得 $\frac{100!}{(n!)^2}$ 不為整數。 (10%)

2. 設 a_n 表示 3^n 的個位數字，試求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2002} + a_{2003}$ 之值。 (15%)

3. 設 p, q, r 為介於 0 與 1 之間的三個實數，試證在 0 與 1 之間存在一個實數 x 使得 $\frac{1}{|x-p|} + \frac{1}{|x-q|} + \frac{1}{|x-r|} < 20$ (15%)

4. 試求滿足方程式 $(y+1)^2 = x^4 + 20x^3 + 104x^2 + 40x + 2004$ 的所有整數解 (x, y) (20%)

5. 直線 L 上有兩相異固定點 B 與 C ，已知 B 與 C 相距 d 單位；直線 L 外有一平行線 M ，兩線相距 h 單位；已知點 A 為直線 M 上的一點且 A 可以在直線 M 上自由移動。設 A, B, C 三點形成一個三角形 ABC 。

(a) 試證： $\triangle ABC$ 的內切圓面積最大時，則 $\triangle ABC$ 是一個等腰三角形。

(b) 若 $d = 6, h = 4$ ，試求 $\triangle ABC$ 的最大內切圓面積。 (20%)

6. 設 $a, b, c > 0$ ，且 $abc = 8$ 。試證： $\frac{1}{2+a+b} + \frac{1}{2+b+c} + \frac{1}{2+c+a} \leq \frac{1}{2}$ (20%)