教育部九十一學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）【參考解答】

一、$f(p^aq^b)$

$= |\{ x \mid 1 \le x \le p^aq^b, (x, p^aq^b) = (x+1, p^aq^b) = 1\}|$

$= |\{ x \mid 1 \le x \le p^aq^b, (x, pq) = (x+1, pq) = 1|$

$= |\{ x \mid 1 \le x \le p^aq^b, p \nmid x, p \nmid (x+1), q \nmid x,$ 且 $q \nmid (x+1)\}|$

$= p^aq^b - |\{ x \mid 1 \le x \le p^aq^b, p|x$ 或 $p|(x+1)$或 $q|x$ 或 $q|(x+1)\}|$

$= p^aq^b - |\{ x \mid 1 \le x \le p^aq^b, p|x\}| - |\{ x \mid 1 \le x \le p^aq^b, p|(x+1)\}|$

$- |\{ x \mid 1 \le x \le p^aq^b, q|x\}| - |\{ x \mid 1 \le x \le p^aq^b, q|(x+1)\}|$

$+ |\{x| 1 \le x \le p^aq^b, p|x$ 且 $p|(x+1)\}| + |\{x| 1 \le x \le p^aq^b, p|x$ 且 $q|x)\}|$

$+ |\{x \mid 1 \le x \le p^aq^b, p|x$ 且 $q|(x+1)\}| + |\{x \mid 1 \le x \le p^aq^b, p|(x+1)$且 $q|x \}|$

$+ |\{x \mid 1 \le x \le p^aq^b, p|(x+1)$且 $q|(x+1)\}| + |\{x \mid 1 \le x \le p^aq^b, q|x$ 且 $q|(x+1)\}|$

（若 $p|x$ 且 $p|(x+1)$，則 $p|1$，不合。故上式已窮盡所有組合。）

$= p^aq^b - p^aq^b \cdot \frac{2}{p} - p^aq^b \cdot \frac{2}{q} + p^aq^b \cdot \frac{4}{pq}$

$$\therefore \frac{f(p^aq^b)}{p^aq^b} = 1 - \frac{2}{p} - \frac{2}{q} + \frac{4}{pq} = \left(1 - \frac{2}{p}\right)\left(1 - \frac{2}{q}\right)$$

二、(1) 證 $(1+\sqrt{3})^{2n} + (1-\sqrt{3})^{2n}$ 是比 $(1+\sqrt{3})^{2n}$ 大的最小整數。

存在自然數 A_n, B_n 使得

$$(1+\sqrt{3})^{2n} = A_n + B_n\sqrt{3},\ (1-\sqrt{3})^{2n} = A_n - B_n\sqrt{3}\text{。}$$

因為 $|1-\sqrt{3}| < 1$，所以 $0 < (1-\sqrt{3})^{2n} < 1$。

因此 $(1+\sqrt{3})^{2n} + (1-\sqrt{3})^{2n} = 2A_n$ 為所求。

(2) 證 $2^{n+1} | 2A_n$。

事實上，可證 $2^n | A_n, B_n$。採用數學歸納法。

$A_1 = 4$ 及 $B_1 = 2$，所以當 $n = 1$ 時成立。

設當 $n = k$ 時成立，則

$$A_{k+1} + B_{k+1}\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2(A_k + B_k\sqrt{3})$$

$$= (4A_k + 6B_k) + (2A_k + 4B_k)\sqrt{3}\text{。}$$

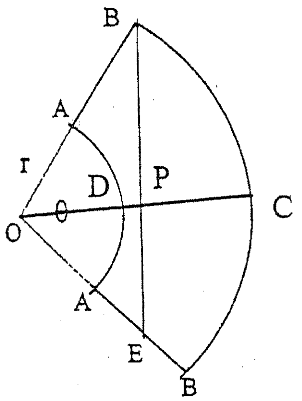
故有 $A_{k+1} = 4A_k + 6B_k$, $B_{k+1} = 2A_k + 4B_k$。因此 $2^{k+1} | A_{k+1}, B_{k+1}$。

三、圓錐台表面展開如右圖(1)。

最短從 B 至 E 經 $\overline{DC}$ 的曲線

是線段 BPE。

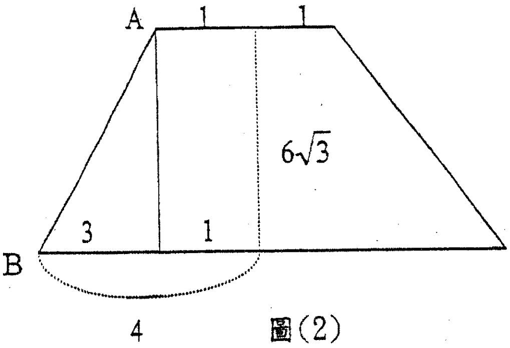
令 $\overline{OA}=r, \angle AOA=\theta$。



圖(1)

如圖(2)

$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(6\sqrt{2})^2}=9,$



圖(2)

$\overline{AA}=2\pi=r\theta,\quad \overline{BB}=8\pi=(9+r)\theta,$

$8\pi=9\theta+2\pi,\ \theta=2\pi/3$

$\therefore r=3$。

對$\triangle OBE$用餘弦定理得

$$\overline{BE}=\sqrt{\overline{OE}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OE}\,\overline{OB}\cos\tfrac{2\pi}{3}}=6\sqrt{7}\ 。$$

四、因 $\log_{10}x^2y=2\log_{10}x+\log_{10}y$，由已知條件

$$\log_{10}x=n+a,\ \log_{10}y=m+b \text{ 及 } \log_{10}x^2y=2+c$$

得 $2+c=2n+2a+m+b$。即

$$2n+m=c-a+1 。\qquad (1)$$

因 a 及 c 均為小於 1 之正數，$-1<c-a<1$。

(1)式左邊為整數，$c-a$ 必為整數，故 $c-a=0, c=a, 2n+m=c-a+1=1$。

但 m, n 為非負整數，$n=0, m=1$。因而 x 為一位正整數，y 是二位正整數。

又 $\log_{10}x+\log_{10}y=n+m+a+b=0+1+1=2$，故 $\log_{10}xy=2, xy=100$。

因此只有三組解

$$\begin{cases}x=2\\y=50\end{cases},\quad \begin{cases}x=4\\y=25\end{cases},\quad \begin{cases}x=5\\y=20\end{cases}。$$