# 教育部九十一學年度高級中學數學競賽

## 台中區複賽試題（一）　　編號：＿＿＿＿＿

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

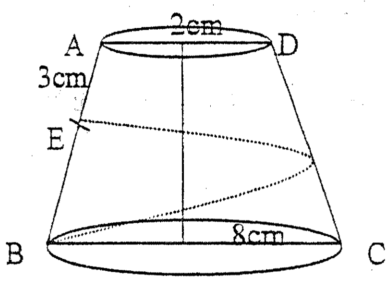
---

一、(13 分) 令 f(n)代表集合 $\{x \mid 1 \le x \le n, n$ 為整數且 x 和 x+1 都與 n 互質$\}$中的元素個數。若 p 和 q 為兩個相異奇質數，且 a 和 b 為正整數。試求

$$\frac{f(p^a q^b)}{p^a q^b}。$$

二、(12 分) 證明比 $(\sqrt{3}+1)^{2n}$ 大的最小正整數可被 $2^{n+1}$ 整除。

三、(12 分) 一個直圓錐台如下圖，上底之直徑為 2cm，下底之直徑為 8cm，高為 $6\sqrt{2}$ cm。$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 為直圓錐台之二側邊，E 為 $\overline{AB}$ 上一點，$\overline{AE} = 3$cm。由 B 經 $\overline{CD}$ 到 E 之最短曲線長為何?




四、(12 分) 設 a、b、c 均為小於 1 的正數，且 $a+b=1$。m、n 為非負整數。x 及 y 為自然數且滿足條件:

$$\log_{10} x = n + a, \quad \log_{10} y = m + b, \quad \log_{10}(x^2 y) = 2 + c。$$

求 x 及 y 之值。