

臺北市九十一學年度

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一：設甲、乙兩圓交於兩相異點 A 與 P ，連接點 P 與甲圓圓心的直線交乙圓於另一點 B ，連接點 P 與乙圓圓心的直線交甲圓於另一點 C 。試證：直線 AP 通過圓 PBC 的圓心。（16 分）

問題二：設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 與 $h(x)$ 都是實係數多項式，而且對每一對實數 x 與 y ，恆有

$$(x-y)f(x)+h(x)-xy+y^2 \leq h(y) \leq (x-y)g(x)+h(x)-xy+y^2。$$

試求出所有此種多項式 $f(x)$ 、 $g(x)$ 與 $h(x)$ 。（16 分）

問題三：對每個正整數 n ，令 $S(n)$ 表示 n 的十進位表示法中的所有數字之和。例如：

$$S(1609) = 1 + 6 + 0 + 9 = 16。$$

(1) 試證：對每個正整數 k ，必有一正整數 m 滿足 $S(m) - S(m+1) = 9k - 1$ 。（8 分）

(2) 試找出所有可能的正整數 n ，使得有一對 $S(m)$ 與 $S(m+1)$ 都是 n 的倍數。（9 分）