

臺灣省北部第四區高級中學九十一學年度

數學科能力競賽試題(二)(新竹高中)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，滿分 21 分，每題 3 分。
2. 考試時間 1 小時。
3. 請將答案寫在答案卷上。
4. 計算紙必須連同答案卷繳回。

1. 設平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 與 x 軸、 y 軸、 z 軸的交點分別為 A 、 B 、 C 。令 O 為原點，則內切於四面體 $OABC$ 的球之半徑為多長？
2. 如果一個十位數 n 的各位數字都不同，且可被 99999 整除；則稱 n 為「魔術數」。問共有多少個魔術數？
3. 滿足 $a^2 + b^2 - a - 8b - 2ab + 16 = 0$ 且 $0 < a, b < 100$ 的正整數 a, b 中， a 的最大值為何？
4. 若方程式 $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ 恰有四個實根，且它們成等差數列，則 a 之值為多少？
5. 將字母 a, a, b, b, c, c, c 依逆時針排成一圓形，共有多少種排法？
6. 滿足 $x + y + z = 50$ 且 $0 \leq x \leq 45$ ， $1 \leq y \leq 47$ ， $2 \leq z \leq 49$ 的正整數解 (x, y, z) ，共有多少組？
7. 已知矩陣 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 滿足 $A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，其中 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。若矩陣 $A^{100} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ ，則序對 $(x, w) = ?$