# 臺灣省北部第四區高級中學九十一學年度

# 數學科能力競賽試題(一)【參考解答】(新竹高中)

1.【參考解答】:

(a) $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

(b)

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{2(t^2-1)^2+12t(t^2-1)+16t^2}{(1+t^2)^2}\\&=2\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta+4\sin^2\theta\\&=2\frac{1+\cos2\theta}{2}-3\sin2\theta+4\frac{1-\cos2\theta}{2}\\&=\cos2\theta-3\sin2\theta+3\\&=\sqrt{10}\cos(2\theta+\alpha)+3\end{aligned}$$

所以最大值為$\sqrt{10}+3$, 最小值為$-\sqrt{10}+3$.

2.【參考解答】:

(a) 設$\overline{AE}=x$, $\overline{BE}=y$, $\overline{BE}:\overline{EP}=1:\mu$, 則$\overline{CE}=\lambda x$, $\overline{PE}=\mu y$.

因為$|\Delta PBD|=|\Delta PCE|=|\Delta PAF|$, 且$|\Delta PAF|=\dfrac{\overline{FP}}{\overline{CP}}\cdot|\Delta PAC|=\dfrac{\overline{FP}}{\overline{CP}}\cdot\dfrac{x+\lambda x}{\lambda x}\cdot|\Delta PCE|$,

所以

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{CP}}=\frac{\lambda}{1+\lambda}. \tag{1}$$

同理, 亦可由$|\Delta PBD|=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}\cdot|\Delta PCB|=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}\cdot\dfrac{y+\mu y}{\mu y}\cdot|\Delta PEC|$得

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\mu}{1+\mu}. \tag{2}$$

由孟氏定理可知(考慮$\Delta FBC$), $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}\cdot\dfrac{\overline{BA}}{\overline{AF}}\cdot\dfrac{\overline{FP}}{\overline{PC}}=1$, 因而由(1), (2)可得

$$\frac{2\mu+1}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\overline{BA}}{\overline{AF}}=1. \tag{3}$$

又由孟氏定理(考慮$\Delta EAB$)可得$\dfrac{\overline{BF}}{\overline{AF}}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{EC}}\cdot\dfrac{\overline{EP}}{\overline{BP}}=1$, 因而可得

$$\left(1+\frac{\overline{BA}}{\overline{AF}}\right)\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}=1. \tag{4}$$

由(3), (4)可得$\dfrac{\lambda(\mu+1)}{\mu(\lambda+1)}-1=\dfrac{\mu(\lambda+1)}{\lambda(2\mu+1)}$, 即$\dfrac{\lambda-\mu}{\mu(\lambda+1)}=\dfrac{\mu(\lambda+1)}{\lambda(2\mu+1)}$, 所以

$$\mu^2(\lambda+1)^2=(\lambda-\mu)\lambda(2\mu+1). \tag{5}$$

再由孟氏定理(考慮$\Delta EBC$)可得$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}\cdot\dfrac{\overline{BP}}{\overline{EP}}\cdot\dfrac{\overline{EA}}{\overline{CA}}=1$；因此由(2)可得

$$\frac{2\mu+1}{\mu}\cdot\frac{\mu+1}{\mu}\cdot\frac{1}{1+\lambda}=1,$$

$$\mu^2(\lambda+1)=(2\mu+1)(\mu+1). \tag{6}$$

將(6)代入(5)可得

$$(\lambda+1)(2\mu+1)(\mu+1)=(\lambda-\mu)\lambda(2\mu+1);$$
$$\lambda^2-\mu\lambda=\lambda\mu+\lambda+\mu+1;$$
$$\mu(2\lambda+1)=\lambda^2-\lambda-1.$$

所以

$$\mu=\frac{\lambda^2-\lambda-1}{2\lambda+1},\ \mu+1=\frac{\lambda^2+\lambda}{2\lambda+1},\ 2\mu+1=\frac{2\lambda^2-1}{2\lambda-1},\ \lambda-\mu=\frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda+1}. \tag{7}$$

將這些代入(5)，再化簡可得

$$(\lambda-1)(\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda-1)=0.$$

所以 $\lambda=1$ 或 $\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda-1=0$．若 $\lambda=1$，則 $\mu=\dfrac{\lambda^2-\lambda-1}{2\lambda+1}=-\dfrac{1}{3}<0$，此為不可能；

所以，$\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda-1=0$.

(b) 我們現在證明：$|\Delta CEP|=|\Delta ABC|$.

$$|\Delta CEP|=\frac{\lambda}{\lambda+1}|\Delta APC|=\frac{\lambda}{\lambda+1}\mu|\Delta ABC|=|\Delta ABC|$$

$$\Leftrightarrow \mu=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow \lambda\mu=\lambda+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{\lambda(\lambda^2-\lambda-1)}{2\lambda+1}=\lambda+1\quad(\text{由}(7))$$
$$\Leftrightarrow \lambda^3-3\lambda^2-4\lambda-1=0.$$

由(b)知此成立，所以$|\Delta CEP|=|\Delta ABC|$.

3.【參考解答】：

(a) 對一般的 $n$，我們可取 $a_k=-k$，$\forall\ k=1,2,\cdots,n-1$，$a_n=C_2^n+1$，則此例子中恰有 $n-1$ 組的 $a_i+a_j$ 是正整數($a_k+a_n\geq 1$，$\forall\ k=1,2,\cdots,n-1$)．由此可得 $f(n)\leq n-1$，$\forall\ n=2,3,\cdots$.

(b) 由 (a) 知 $f(4)\leq 3$．$f(4)\leq 2$，若則存在四個相異數 $a_1<a_2<a_3<a_4$，使得 $a_1+\cdots+a_4\geq 1$ 且

$$a_1+a_4\leq 0\ (\text{因為 } a_1+a_4<a_2+a_4<a_3+a_4)$$
$$a_2+a_3\leq 0\ (\text{因為 } a_2+a_3<a_2+a_4<a_3+a_4)$$

由此可得 $1\leq a_1+a_2+a_3+a_4=(a_1+a_4)+(a_2+a_3)\leq 0$，矛盾！故，$f(4)=3$.

(c) 我們利用數學歸納法證明：對任一偶數 $n$，$f(n)\geq n-1\Rightarrow f(n+2)\geq n+1$.對於任意整數 $a_1<a_2<\cdots<a_{n+2}$，使得 $a_1+a_2+\cdots+a_{n+2}\geq 1$．若 $a_1+a_{n+2}\geq 1$，則 $a_k+a_{n+2}\geq 1$，

$\forall k=2,3,\cdots,n+1$；於是至少有 $n+1$ 組的和 $a_i+a_j$ 是正整數. 若 $a_1+a_{n+2}\le 0$，則 $a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}\ge 1$；由數學歸納法之假設可得至少有 $n-1$ 組的和 $a_i+a_j$ 是正整數，其中 $2\le i<j\le n+1$. 此時，$a_{n+2}+a_{n+1}>a_{n+2}+a_n\ge 1$，所以共至少可得 $n+1$ 組的和 $a_i+a_j$ 是正整數. 故 $f(n+2)\ge n+1$. 由 $f(4)\ge 3$，可推得 $f(6)\ge 5$，$f(8)\ge 7$，$\cdots$，$f(2002)\ge 2001$. 因此由(a)知 $f(2002)=2001$.