台灣省第二區九十一學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題【參考解答】

【問題一】：找出所有實數 a，使得 $(25)^x - 3a \cdot 5^x + a^2 + 1 = 0$ 在區間（0, 1）恰有一個根（重根算一個根）。(16 分)

解：

設 $y = 5^x$

$f(y) = y^2 - 3ay + a^2 + 1$

$\Rightarrow$ $f(y)$在（1,5）恰有一根

若 $f(1) = 0 \Rightarrow a = 1$或 $a = 2$

若 $f(5) = 0 \Rightarrow a = 2$或 $a = 13$

（A） 當 $a = 1 \Rightarrow f(y) = y^2 - 3y + 2 \Rightarrow f(y)$ 的兩根為 1,2（合）

當 $a = 2 \Rightarrow f(y) = y^2 - 6y + 5 \Rightarrow f(y)$ 的兩根為 1,5 $\Rightarrow f(y)$在（1,5）無根（不合）

當 $a = 13 \Rightarrow f(y) = y^2 - 39y + 170 \Rightarrow f(y)$ 的兩根為 5,34 $\Rightarrow f(y)$在（1,5）無根（不合）

（B） 當 $f(1)f(5) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-2)^2(a-13) < 0 \Rightarrow a \neq 2$ 且 $1 < a < 13$

$\Rightarrow$ 此時 $f(y)$在（1,5）恰有一根

(C) 當$\triangle = 9a^2 - 4(a^2+1) = 0$ 時，$f(y)$在（1,5）恰有一根（重根），

$\Rightarrow$ 此時，根為$\dfrac{3a}{2} \in (1,5)$

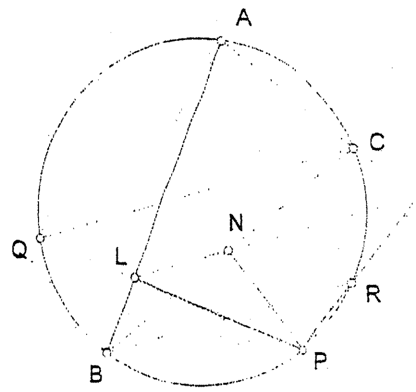
所以取 $a = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

答：$1 \le a < 13$，$a \neq 2$，$a = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

【問題二】: 設 Σ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓，P 為 $\overset{\frown}{BC}$ 弧上之一點，自 P 作 AB 直線之垂線，交 AB 直線於 L 點，並交圓 Σ 於另一點 Q；自 P 作 AC 直線之垂線，交 AC 直線於 M 點，並交圓 Σ 於另一點 R；自 P 作 BC 直線之垂線，交 BC 直線於 N 點；

試證明：(1) L，M，N 三點共線。(9 分)

(2) $\overline{CQ} // \overline{BR}$。(8 分)



解：如圖

先證：L，M，N 共線

$BPNL$ 共圓（$\overline{BP}$ 為直徑）$\Rightarrow$ $\angle BNL = \angle BPL$ ------①

$PMCN$ 共圓（$\overline{PC}$ 為直徑）$\Rightarrow$ $\angle CNM = \angle CPM$ ------②

$ALPM$ 共圓（$\overline{AP}$ 為直徑）$\Rightarrow$ $\angle BAC$ 與 $\angle LPM$ 互補

但 $\angle BAC$ 與 $\angle BPC$ 互補

$\therefore \angle LPM = \angle BPC$

$\therefore \angle CPM = \angle BPL$ ------③

由 ①、②、③ 得到 $\angle BNL = \angle CNM$　　$\therefore L$，M，N 共線

再證 $\overline{QC} // \overline{LN}$：

$BPNL$ 共圓 $\Rightarrow$ $\angle NLP = \angle NBP$

$BPCQ$ 共圓 $\Rightarrow$ $\angle NBP = \angle CQP$

$\Rightarrow$ $\angle NLP = \angle CQP$

$\Rightarrow$ $\overline{LN} // \overline{QC}$

再證 $\overline{BR} // \overline{NM}$：

$CMPN$ 共圓 $\Rightarrow$ $\angle PMN = \angle PCN$

$\hspace{9em}\|$

$BPCQ$ 共圓 $\Rightarrow$ $\angle BRP = \angle BCP$

$\Rightarrow \angle PMN = \angle BRP$

$\Rightarrow \overline{BR} // \overline{NM}$

又 L，M，N 共線 $\Rightarrow$ $\overline{CQ} // \overline{BR}$

【問題三】：設數列

$$\ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots,$$

對任意整數 n 皆滿足 $a_n>0$ 且 $a_{n-1}+\dfrac{1}{a_n}=2$。試證：$a_0=1$。(16 分)

解：

顯然 $0<a_n<2 \quad \forall n$

假設 $a_0>1$

那麼，因為 $a_n=\dfrac{1}{2-a_{n-1}} \Rightarrow a_n>1 \quad \forall n\geq 0$

$$a_{n-1}=2-\frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n>1 \quad \forall n\leq 0$$

且 $a_n-a_{n-1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}-2>0 \quad \therefore a_n>a_{n-1} \quad \forall n$

又 $a_n-a_{n-1}=(2-\dfrac{1}{a_{n+1}})-(2-\dfrac{1}{a_n})=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}$

$\Rightarrow \quad a_n-a_{n-1}<a_{n+1}-a_n$

設 m 為任意正整數

那麼 $a_0=(a_0-a_{-1})+(a_{-1}-a_{-2})+\ldots+(a_{-m+1}-a_{-m})+a_{-m}$

$\quad > m(a_0-a_{-1}) \quad \forall m$

$\Rightarrow a_0$ 為任意大 $\quad \rightarrow\leftarrow$

因此 $a_0\leq 1$

同理，可証 $a_0\geq 1$

$\Rightarrow \quad a_0=1$