

台灣省第二區九十一學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】：找出所有實數 a ，使得 $(25)^x - 3a \cdot 5^x + a^2 + 1 = 0$ 在區間 $(0, 1)$ 恰有一個根 (重根算一個根)。(16分)

【問題二】：設 Σ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓， P 為 \widehat{BC} 弧上之一點，自 P 作 AB 直線之垂線，交 AB 直線於 L 點，並交圓 Σ 於另一點 Q ；自 P 作 AC 直線之垂線，交 AC 直線於 M 點，並交圓 Σ 於另一點 R ；自 P 作 BC 直線之垂線，交 BC 直線於 N 點；試證明：(1) L, M, N 三點共線。(9分)

(2) $\overline{CQ} \parallel \overline{BR}$ 。(8分)

【問題三】：設數列

$$\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots,$$

對任意整數 n 皆滿足 $a_n > 0$ 且 $a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = 2$ 。試證： $a_0 = 1$ 。(16分)