

台灣省第一區九十一學年度

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（二）試題【參考解答】

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，每題3.5分，滿分為21分。
2. 考試時間：1小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

答案欄

(一)	(二)	(三)
-1,0,1	0	$\frac{5}{7}$
(四)	(五)	(六)
220	168	7200

總計：_____

1. 設 n 與 $(n+i)^4$ 都是整數。求 $n =$ (一)。

解：因為 $(n+i)^4 = (n^4 - 6n^2 + 1) + 4(n^3 - n)i$ ，所以 $n^3 - n = 0 \Rightarrow n = -1, 0, 1$ 。

2. 化簡 $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{7+3\sqrt{5}}}} - \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}}$ (二)。

解：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14+6\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2+(3+\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}-1}{2+(3-\sqrt{5})} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{5+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}-1}{5-\sqrt{5}} = 0. \end{aligned}$$

3. 設 $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ ，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。若 $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ ， $f(\beta) = \frac{1}{3}$ ，則 $f(\alpha + \beta) =$ (三)。

解： $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1}$ ，

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{a^{2\alpha} - 1}{a^{2\alpha} + 1} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } a^{2\alpha} = 3,$$

$$f(\beta) = \frac{a^{2\beta} - 1}{a^{2\beta} + 1} = \frac{1}{3}, \text{ 故 } a^{2\beta} = 2.$$

$$\Rightarrow f(\alpha + \beta) = \frac{a^{2(\alpha+\beta)} - 1}{a^{2(\alpha+\beta)} + 1} = \frac{a^{2\alpha} \times a^{2\beta} - 1}{a^{2\alpha} \times a^{2\beta} + 1} = \frac{5}{7}.$$

4. 設小於 220，又整除 220 的所有正整數之和為 n 。試求小於 n ，又整除 n 的所有正整數之和為 (四)。

解：將因數 220 分解得到 $2^2 \times 5 \times 11$ 。它的所有正因數（排除 220 自己）之和為

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

將 284 因數分解得到 $2^2 \times 71$ 。它的所有正因數（排除 284 自己）之和為

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

答案為 220。

5. 已知實係數多項式函數 $f(x)$ 滿足 $f(5-x) = f(1+x)$ ，並且方程 $f(x) = 0$ 恰有 56 個實根，則這 56 個實根的和 = (五)。

解：由 $f(5-x) = f(1+x)$ 知 $f(x) = f(6-x)$ ，

$y = f(x)$ 之圖形對稱於直線 $x = 3$

因此 56 個根可配成 28 對，每對的和為 6，總和為 168。

6. 10 張椅子排成一列，甲、乙、丙、丁、戊 5 人分成三組入座，三組人數各為 1 人，2 人，2 人，則同組相鄰，不同組不相鄰之坐法有 (六) 種。

解：先排甲乙丙丁戊，共 $5!$ 種，且每個人各坐 1 張椅子，再用 2 張椅子將 5 人隔成 1 人、2 人、2 人三組，共有 3 種，再將其餘的 3 張椅子，任意排入由 3 組的人所隔成的 4 個間隔。所以共有 $5! \times 3 \times H_4^3 = 7200$ 。