高雄市高級中學九十一學年度數學競賽複賽試題

競試（二）【參考解答】

一、【解】

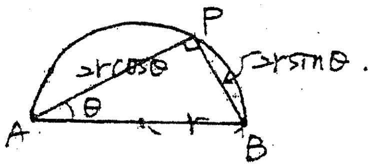
如右圖，

$\therefore\ 3\overline{AP}+4\overline{BP}$

$=6r\cos\theta+8r\sin\theta$

$=2r(3\cos\theta+4\sin\theta)$

$\leq 2r\cdot 5=10r$



$\therefore\ 3\overline{AP}+4\overline{BP}$ 的最大值為 $10r$。

二、【解】

$\because\triangle ABP$ 與 $\triangle APE$ 同高，且 $\triangle BPD$ 與 $\triangle PDE$ 同高

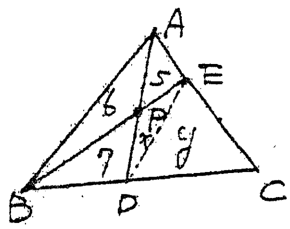
$\therefore a\triangle ABP : a\triangle APE=\overline{BP}:\overline{PE}$

且 $a\triangle BPD : a\triangle EPD=\overline{BP}:\overline{PE}$

$\therefore$ 令 $a\triangle EPD=x$

則 $\dfrac{6}{5}=\dfrac{7}{x}\Rightarrow x=\dfrac{35}{6}$

同理可知：$\dfrac{a\triangle ABD}{a\triangle ADC}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\dfrac{a\triangle BED}{a\triangle CED}$



$\therefore$ 令 $a\triangle CED=y$

則 $\dfrac{13}{5+x+y}=\dfrac{7+x}{y}\Rightarrow y=\dfrac{5005}{6}$

$\therefore a\triangle ABC=5+6+7+x+y=858.$

三、【解】

(1) $y=x^2-(a+2)x+\dfrac{5}{4}(a+1)$

$\because\triangle=(a+2)^2-4\times\dfrac{5}{4}(a+1)$

$=a^2-a-1.$

$\because$ 只有一個實根

$\therefore\triangle=0$，則 $a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

(2) $\because a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore a^2=a+1$

$a^3=a^2\cdot a=(a+1)a=a^2+a=2a+1$

$a^4=a^3\cdot a=(2a+1)\cdot a=2a^2+a=3a+2$

$a^5=a^4\cdot a=(3a+2)\cdot a=3a^2+2a=5a+3$

$a^6=a^5\cdot a=(5a+3)\cdot a=5a^2+3a=8a+5$

$\therefore a^{18}=(a^6)^3=(8a+5)^3=(8a)^3+3(8a)^2\cdot 5+3(8a)\cdot 5^2+5^3$

$=8^3(2a+1)+15\times 64(a+1)+75\times 8a+125$

$=2584a+1597$

$\because a^2=a+1$

$\therefore \dfrac{1}{a}=a-1$

$a^{-2}=(a-1)^2=a^2-2a+1=-a+2$

$a^{-6}=(-a+2)^3=(-a)^3+3(-a)^2\cdot 2+3(-a)\cdot 2^2+2^3$

$=-8a+13$

$\therefore a^{18}+323a^{-6}=2584a+1597+323(-8a+13)=5796$

四、【解】

(a) $x=n+k+1$

$y=k+1$

(b) $(k+1)$個白球和n個黑球，由左到右，排成一列的排法可視為有：

$A_{k+1}, A_{k+2},\cdots, A_{k+n+1}$ 等 $n+1$ 個互斥事件，其中

A_{k+1}：左邊$k+1$個全部為白球，排法有$\dbinom{k}{k}$

A_{k+2}：左邊$k+2$個中，有$k+1$個白球，且第$k+2$個為白球，排法有$\dbinom{k+1}{k}$.

$\vdots$

$2\leq j\leq n+1,$

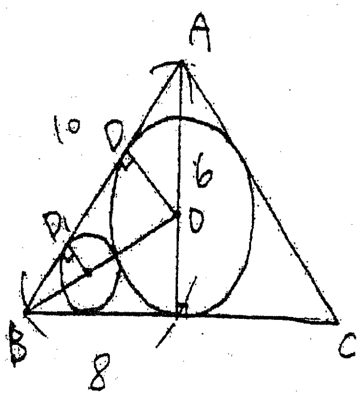
A_{k+j}：左邊$k+j$個中，有$k+1$個白球且第$k+j$個為白球，排法有

$$\binom{k+j-1}{k}.$$

$$\therefore \binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{k+j-1}{k}+\cdots+\binom{k+n}{k}$$

$$=\binom{k+n+1}{k}.$$

五、【解】



設S_0之半徑為r_0，

則$5r_0+4r_0=24$

$\therefore r_0=\dfrac{8}{3} \qquad \therefore S_0=\dfrac{64}{9}\pi$

$\overline{BO}=\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+8^2}=\dfrac{8}{3}\sqrt{10}=a$

$\because \triangle BOD \sim \triangle BO_1D_1$，令$r_1$為$S_1$之半徑

則$\dfrac{r_0}{r_1}=\dfrac{a}{a-r_0-r_1}$

$\Rightarrow r_1=\left(\dfrac{a-r_0}{a+r_0}\right)r_0=\left(\dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}\right)r_0$

令$w=\dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}$

同理可得$r_2=\left(\frac{a-r_0}{a+r_0}\right)^2 r_0=w^2r_0$

$$\begin{aligned}\therefore A_0+A_1+A_2+\cdots &= r_0^2\pi+(wr_0)^2\pi+(w^2r_0)^2\pi+\cdots \\ &= r_0^2\pi\left(\tfrac{1}{1-w^2}\right) \\ &= \frac{64}{9}\pi\cdot\frac{81}{44\sqrt{10}-80}=\frac{144\pi}{11\sqrt{10}-20}=\frac{8(11\sqrt{10}+20)}{45}\end{aligned}$$

$\therefore A_0+A_1+A_2+\cdots=\dfrac{8(11\sqrt{10}+20)}{45}.$