

高雄市高級中學九十一學年度數學競賽複賽試題

競試(二)

編號：_____

1. 本試卷共五題
2. 考試時間：1 小時
3. 計算紙必須連同試卷交回
4. 不可使用計算器

一、點 P 為以 $\overline{AB} = 2r$ ($r > 0$) 為直徑的半圓之圓周上一點，試求 $3\overline{AP} + 4\overline{BP}$ 的最大值。

二、 $\triangle ABC$ 中， D, E 分別為 \overline{BC} 與 \overline{AC} 邊上的點，且 \overline{AD} 與 \overline{BE} 交於 P 點。若 $\triangle APE$ ， $\triangle APB$ 及 $\triangle BPD$ 的面積分別為 5, 6, 7，試求 $\triangle ABC$ 的面積。

三、設 a 為實數，若拋物線 $y = x^2 - (a+2)x + \frac{5}{4}(a+1)$ 的圖形與 x 軸的交點只有一個，

1. 試求 a 值。
2. 試求 $a^{18} + 323a^{-6}$ 值。

四、1. 已知

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{x}{y},$$

其中 n, k 為已知正整數， x, y 為未知數，試求 x, y (以 n, k 表示)。

2. 承上題，試證 1 中的恆等式。

五、 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ，且 $\overline{BC} = 16$ ，今在 $\triangle ABC$ 中，作內切圓 S_0 ；其次，在圓 S_0 的左邊再作圓 S_1 與圓 S_0 和邊 \overline{AB} 及 \overline{BC} 都相切；如此繼續下去，可得圓 S_0, S_1, S_2, \dots 。若其面積為 A_i ， $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ，

1. 試求圓 S_0 的面積 A_0 。
2. 試求無窮級數 $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$ 的值。