

高雄市高級中學九十一年度數學競賽複賽試題

競試（一） 編號：_____

1. 本試卷共四題
2. 考試時間：2小時
3. 計算紙必須連同試卷交回
4. 不可使用計算器

一、已知實數 a, b, c 滿足 $a = \sqrt{2} + b$, $2ab + 2\sqrt{2}c^2 + 1 = 0$, 試證： $a + b + c = 0$.

二、試問是否存在二個整係數多項式 $p(x)$ 與 $q(x)$, 使得多項式

$p(x), p(x) + q(x), p(x) - q(x)$ 都是多項式的完全平方, 即

$p(x) = [r(x)]^2, p(x) + q(x) = [s(x)]^2, p(x) - q(x) = [t(x)]^2$, 其中

$r(x), s(x), t(x)$ 是整係數多項式, 且 $q(x)$ 不能表為 $kp(x)$, 其中 k 為實數? 請說明理由。

三、某賓果遊戲中, 甲生從 $1, 2, 3, \dots, 40$ 號選取 8 個不同的號碼, 然後莊家從編號 $1, 2, 3, \dots, 40$ 的號碼球中, 每次取一球, 取後不放回, 陸續抽出號碼球。當甲生所選的 8 個號碼都被莊家抽出時, 則甲生結束遊戲。試問:

1. 莊家抽到第 10 個號碼球時, 甲生結束遊戲之機率為何?
2. 平均而言, 莊家抽多少個號碼球後, 甲生就結束遊戲?

四、設 $0 < b < a$, 在坐標平面上, O 為原點, C_a 表示以 O 為圓心, a 為半徑長的圓, 而 C_b 表示以點 $(a-b, 0)$ 為圓心, b 為半徑長的圓, 且 C_b 內切 C_a 於點 $(a, 0)$ 。 P 為 C_b 上之一動點, 若點 P 最初位置為 $(a, 0)$, 今將圓 C_b 沿著圓 C_a 的圓周內側依逆時鐘方向移動時, 圓 C_b 本身以順時鐘方向滾動, 試求動點 P 所經過之軌跡方程式。