

九十一學年度屏東區高級中學數學競賽複賽試題

競賽(一)

1. 設  $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq a_2 \geq a_3 > 0$  且  $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ 。證明  $a_1 a_2 a_3 \leq b_1 b_2 b_3$ 。

(12%)

2. 將  $3^{33} + 1$  分解為三個整數之積，使得每個因數都大於  $3^{10}$ 。(12%)

3. 令  $m, n$  為任意一對整數且  $m \geq n \geq 1$ 。請證明  $\frac{\gcd(m, n)}{m} \binom{m}{n}$  為一整數。

其中  $\gcd(m, n)$  為  $m, n$  的最大公因數， $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ 。(12%)

4. 設  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 。對  $S$  的任一子集  $A$ ，隨機變數  $X$  表  $A$  中之元素個數  $Y$

表  $A$  中所有元素的和。假設  $S$  的每一子集出現的機率都一樣。試求 (1)  $X$  的

期望值與變異數，(2)  $Y$  的期望值與變異數，(3)  $X$  與  $Y$  的相關係數。(13%)