教育部九十學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）【參考解答】

一、若將 $n=3,4,5$ 代入關係式，不難看出

$$x_n=\frac{x_1x_2}{(n-1)x_1-(n-2)x_2}$$

$$=\frac{x_1x_2}{(x_1-x_2)n+(2x_2-x_1)}$$ （由數學歸納法證之）

由此可看出充要條件應為 $x_1=x_2=m\in Z\setminus\{0\}$.

二、
$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1 \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=a_2 \\ \vdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\cdot a_n \end{cases}$$

因 $\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)=a_1^2-2a_2\geq 0$ 且 $a_1^2=1$

所以 $a_2=-1$ 所以 $x_1^2+\cdots+x_n^2=3$

又 $\dfrac{3}{n}=\dfrac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}\geq\sqrt[n]{x_1^2x_2^2\cdots x_n^2}=\sqrt[n]{|a_n|^2}=1$

所以 $n\leq 3$ 且等號成立時 $x_1^2=x_2^2=\cdots=x_n^2$.

① $n=3$ 時，$|x_1|=|x_x|=|x_3|=1$，所以只需在中找尋

$\therefore$ 只有 $(x-1)^2(x+1)$ 及 $(x-1)(x+1)^2$ 滿足要求。

② $n=2$ 時，只在 $x^2\pm x\pm 1$ 中找，

$\therefore x^2+x-1, x^2-x-1$ 滿足要求。

③ $n=1$ 時，只有 $x+1, x-1$ 滿足要求。

三、若 X,Y,Z 是所有邊上的中點，則 $a\Delta XYZ=\dfrac{1}{4}a\Delta AB$，若漸漸移動 X,Y,Z 中之一到中點，只要 $\overline{BX}\leq\overline{XC}$，$\overline{CY}\leq\overline{YA}$ 且 $\overline{AZ}\leq\overline{ZB}$，而其他二點固定不動，則 $a\Delta XYZ$ 不

會增加，因為到ΔXYZ固定底的高度遞減或不變。

四、依題意每一寶盒當其正因數出現時，即作一動作，先開、後關、再開．．．，故最後仍開者，其因數個數必為奇數。令此寶盒號數為$p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}$，式中$p_1\cdots p_k$為相異質數且$0\le n_1,\cdots n_k$。則其因數個數$(n_1+1)\cdots(n_k+1)$必為奇數，即$n_1,\cdots n_k$均為偶數。令$n_1=2r_1,\cdots,n_k=2r_k$則此號數$p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}=\left(p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}\right)^2$為一完全平方數。故最後仍開的寶盒之號數各為$1^2,2^2,\cdots,\left[\sqrt{n}\right]^2$。故仍打開的寶盒共有$\left[\sqrt{n}\right]$個。其珍珠總個數為

$$1^2+2^2+\cdots+\left[\sqrt{n}\right]^2=\frac{\left[\sqrt{n}\right]\left(\left[\sqrt{n}\right]+1\right)\left(2\left[\sqrt{n}\right]+1\right)}{6}.$$