教育部九十學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）　　編號：_____

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、(12 分) 設 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是一列不等於零的實數所形成的數列，且滿足下列關係式

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \qquad (n \geq 3)$$

試建立一個關於 x_1 和 x_2 兩項的充要條件以保證有無窮多個 n，使得 x_n 為一整數。

二、(12 分) 設 $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

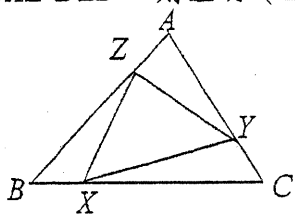
若(i) $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \{1, -1\}$ 且

(ii) $P_n(x) = 0$ 有 n 個實數根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

求出所有滿足上述條件(i)(ii)的多項式 $P_n(x)$。

三、(13 分) 設 ΔABC 為任一三角形，而 X, Y, Z 分別表示邊 BC, CA, AB 上的點（如圖）。

若 $\overline{BX} \leq \overline{XC}, \overline{CY} \leq \overline{YA}, \overline{AZ} \leq \overline{ZB}$，則證明（$\Delta XYZ$ 的面積）$\geq \frac{1}{4}$（ΔABC 的面積）。



四、(12 分) 設有 n 個珍珠寶盒，各編號 $1, 2, \cdots, n$。令 K 號寶盒含有 K 個珍珠。另有 n 張紙牌，各編號 $1, 2, \cdots, n$。首先將 n 個寶盒全部關閉，並隨意抽出一張紙牌，抽出後不再放回。若第一次抽中 K 號紙牌，則編號為 K 的倍數的寶盒打開，其餘保持不動。接著抽中 ℓ 號紙牌時，編號為 ℓ 的倍數的寶盒作相反動作（即原先打開的關閉，原先關閉的打開），其餘保持不動；試問當 n 張紙牌全部抽完後，仍然打開的寶盒有幾個？且其珍珠總數為何？