

臺灣省北部第四區高級中學九十學年度

數學科能力競賽試題(二)(新竹高中)

注意事項：

5. 本試卷共七題填充題，滿分 21 分，每題 3 分。
6. 考試時間 1 小時。
7. 請將答案寫在答案卷上。
8. 計算紙必須連同答案卷繳回。

1. 設實數 x, y 滿足： $(\log_2(x^2 + y))^2 + (\log_2(xy))^2 + 1 = 2\log_2(x^2 + y)$ ，則 $x =$ _____。

2. 滿足下列聯立方程組的非負整數解 a, b, c, d 共有 _____ 組。

$$\begin{cases} a+3b+5c+7d=2001 \\ a+2b+4c+6d=1900 \end{cases}$$

3. 對任意實數 a, b, c ，當 $a > b$ 時，將 (a, b, c) 調整為 $(a-b, b, c-b)$ ；當 $a < b$ 時，將 (a, b, c) 調整為 $(a, b-a, \frac{bc-a^2}{b-a})$ ；當 $a = b$ 時，維持不變；我們稱這樣的過程為一次調整。若 (a, b, c) 經過幾次調整後可得到 $(1, 1, k)$ ，則 $k =$ _____。(以 a, b, c 表示)

4. 將 $1, 2, \dots, 9$ 這 9 個數字分成 3 個三位數，使得這 3 個三位數的乘積最大，則這 3 個三位數中最大的數是 _____。

5. 對所有的自然數 n ，令 $s(n)$ 為其各位數字之和，例如： $s(123) = 1+2+3 = 6$ ；並令 $A = \{n - s(n) : n \in \mathbb{N}\}$ ；則滿足「9 整除 m ，且 $m \in A$ 」的最小自然數 m 為 _____。

6. 設 $\triangle ABC$ 內接於橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，且 C 點的坐標為 $(0, b)$ 。如果過 $\triangle ABC$ 各頂點的橢圓切線都平行於其對邊，則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。(以 a, b 表示)

7. 若正實數 a 滿足： $a^{\cos 2x} + a^{2\sin^2 x} \leq 2$ ，則 a 之範圍為 _____。