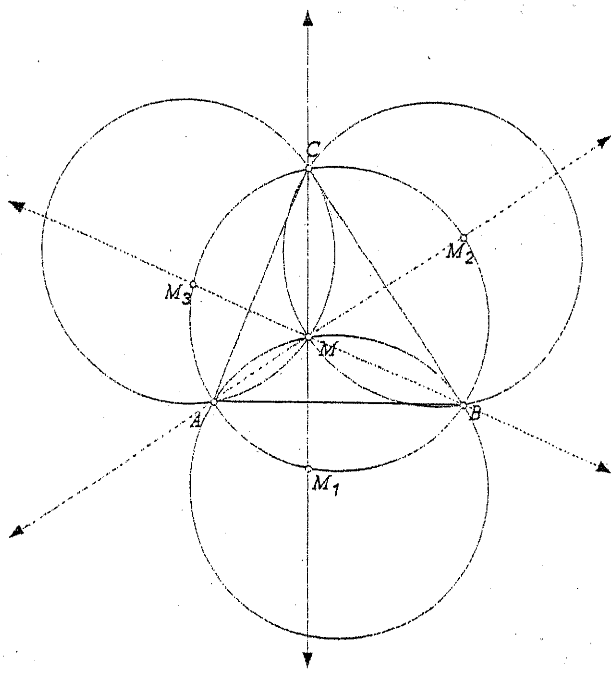
臺灣省北部第三區高級中學九十學年度

數學科能力競賽(一)(新竹高中) 【參考解答】

1. 記ΔABC的外接圓為Γ，並記Γ對於直線AB、BC、CA的對稱圓分別為Γ_1、Γ_2、Γ_3。設M點滿足所求，並令M_1、M_2、M_3分別為M點對於直線AB、BC、CA的對稱點。因為M_1、M_2、M_3都在Γ上，所以M點為Γ_1、Γ_2、Γ_3三圓的交點。
反之，若M點為Γ_1、Γ_2、Γ_3三圓的交點，則顯然滿足所求。故滿足所求的點僅為一點，此點即為三高的交點。



2. (1) $1899 = 9 \cdot 211$不為27的倍數。

(2) 若$n = 3^r k$，其中k不為3之倍數，則$10^{3^r k} - 1 = (10^{3^r} - 1)(1 + 10^{3^r} + \cdots + (10^{3^r})^k)$用數學歸納法可得3的$r+2$正好可整除$10^{3^r} - 1$，故答案為$r+2$。

3. 令$|a'_m - b'_m| = \max\{|a'_i - b'_i| : i = 1, 2, \cdots 9\}$；不失一般性，可設$a'_m > b'_m$。考慮以下10個相異數：

$$b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, a'_m, a'_{m+1}, \cdots, a'_9$$

由鴿籠原理，必有一$j \in \{1, 2, \cdots, 9\}$，使得

$$a_j \in \{a'_m, a'_{m+1}, \cdots, a'_9\} \text{ 且 } b_j \in \{b'_1, b'_2, \cdots, b'_m\}。$$

因為$a_j \ge a'_m > b'_m \ge b_j$，故有

$$|a_j - b_j| \ge |a'_m - b'_m| \text{。}$$

因此，

$$\max\{|a_i - b_i| : i = 1, 2, \cdots, 9\} \ge \max\{|a'_i - b'_i| : i = 1, 2, \cdots, 9\} \text{。}$$

臺灣省北部第四區高級中學九十學年度
數學科能力競賽試題(二)(新竹高中)【參考解答】

編號：______________________

注意事項：

9. 本試卷共七題填充題，滿分 21 分，每題 3 分。

10. 考試時間 1 小時。

11. 計算紙必須連同答案卷繳回。

題　　號	1	2	3	4
答　　案	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1$	5253	$1+bc-ab$	941

題　　號	5	6	7
答　　案	90	$\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$	$\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right]$