

臺灣省北部第四區高級中學九十學年度  
數學科能力競賽試題(一)(新竹高中)

編號：\_\_\_\_\_

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分，第一、二題各 16 分，第三題 17 分。
2. 考試時間 2 小時。
3. 請將答案寫在答案卷上。
4. 計算紙必須連同答案卷繳回。

1. 給定  $\triangle ABC$ 。試求所有滿足下列條件的點：這種點對直線  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  的對稱點都在  $\triangle ABC$  的外接圓上。

2. (1) 對所有的自然數  $n$ ，令  $s(n)$  為其各位數字之和，例如： $s(123)=1+2+3=6$ 。設  $s(n)$  為 27 的倍數，試問  $n$  是否一定是 27 的倍數？

(2) 給定一自然數  $n$ ，試找出最大的正整數  $m$ ，使得  $3^m \mid 10^n - 1$ 。

3. 設  $a_1, a_2, \dots, a_9$  與  $b_1, b_2, \dots, b_9$  是由相異實數構成的兩個數列。分別將兩數列由小至大重新排列而得到兩個遞增數列  $a'_1, a'_2, \dots, a'_9$  與  $b'_1, b'_2, \dots, b'_9$ 。試證：

$$\max\{|a_i - b_i| : i=1, 2, \dots, 9\} \geq \max\{|a'_i - b'_i| : i=1, 2, \dots, 9\}。$$