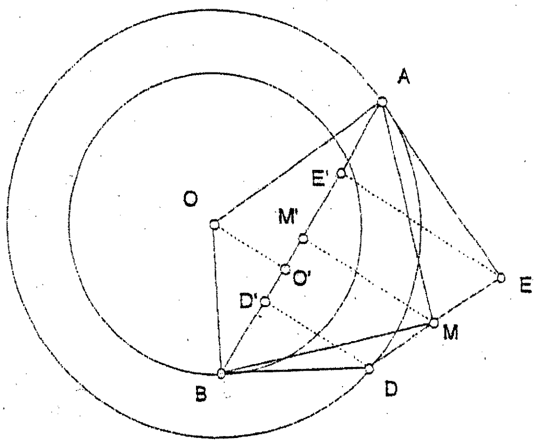
台灣省第二區九十學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題【參考解答】

【問題一】：如下圖，C_1,C_2是兩個以O為圓心的相異同心圓，A,B兩點分別在C_1和C_2上設直線AE和BD分別為C_1和C_2的切線且$\overline{AE}=\overline{AO}$，$\overline{BD}=\overline{BO}$。令$M$為$\overline{DE}$的中點，試證：$\Delta AMB$為等腰直角三角形。(16 分)

證：分別由O,D,M,E作AB的垂線，設垂足分別為O',D',M',E'。

則$\Delta AOO' \cong \Delta AEE'$ (A.S.A.)

$\Delta BOO' \cong \Delta BDD'$ (A.S.A.)



$\therefore \overline{AO'}=\overline{EE'}$, $\overline{AE'}=\overline{OO'}$

$\overline{BO'}=\overline{DD'}$, $\overline{BD'}=\overline{OO'}$

$$\therefore \overline{MM'}=\frac{1}{2}(\overline{DD'}+\overline{EE'})$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AO'}+\overline{BO'})$$

$$=\frac{1}{2}\overline{AB}$$

因為M為$\overline{DE}$的中點

所以M'為$\overline{D'E'}$的中點

又$\overline{AE'}=\overline{BD'}$

$\therefore M'$為$\overline{AB}$的中點

$\therefore \overline{AM'}=\overline{BM'}=\overline{MM'}$

因此ΔAMB為等腰直角三角形

【問題二】：試證："存在n個相異的正整數$a_1,\cdots,a_n$使得$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=1$"的充分且必要條件為"$n\neq 2$"。(16 分)

證：$n=1$，取$a_1=1$，顯然成立

設$n=2$成立，即$\exists a_1<a_2$使得$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}=1$

則$a_1\geq 2$

因為$a_2>a_1$，$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

$n=3$，則$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=6$為所求

設$a_1,\cdots,a_n\,(n\geq 3)$ 滿足$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=1$且$1\leq a_1<\cdots<a_n$

令$b_1=2$，$b_i=2a_{i-1}$，$i=2,\cdots,n+1$

則$b_1,\cdots,b_{n+1}$為所求

故對於$n\geq 3$成立。

【問題三】：設$f(x)=4x(1-x)$，x為實數；$f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$\forall n\geq 1$令$A_n=\{x\text{為實數}\,|\,f_n(x)=0\}$，$n=1,2,3\cdots$。

(1) 試證：對於所有$a\in \mathrm{A_n}$，都有$0\leq a\leq 1$。(8 分)

(2) 試求A_{2001}的元素個數。(9 分)

證：(1) $A_{n+1}=\{x\text{為實數}\mid f_{n+1}(x)=0\}$
$=\{x\text{為實數}\mid f_n(f(x))=0\}$
$=\{x\text{為實數}\mid f(x)\in A_n\}$

觀察：$f^{-1}(0)=\{0,1\}$，$f^{-1}(1)=\{\dfrac{1}{2}\}$，$f^{-1}([0,1])=[0,1]$

(若$a<0$則$f(x)<0$；若$a>1$則$f(x)<0$)

對n作數學歸納法：

$n=1$，$A_1=\{0,1\}$，$\therefore$成立

設$n=k$成立，即$\forall a\in A_k$，$0\leq a\leq 1$

設$a\in A_{k+1}$，則$f(a)\in A_k$

$\therefore 0\leq f(a)\leq 1\Rightarrow 0\leq a\leq 1$

(2) 顯然，$\left|\{x\mid f(x)=a\}\right|=2$，$\forall a\in[0,1)$

$$\left|\{x\mid f(x)=1\}\right|=\{\frac{1}{2}\}$$

$$\therefore \left|A_{k+1}\right| = \left|\{x \mid f(x) \in A_k\}\right|$$

$$= \left|\{x \mid f(x) = 1\}\right| + \sum_{\substack{a \in A_k \\ a \in [0,1)}} \left|\{x \mid f(x) = a\}\right|$$

$$= 1 + \sum_{\substack{a \in A_k \\ a \in [0,1)}} 2$$

$$= 1 + 2(\left|A_k\right| - 1) = 1 + 2(2^{k-1} + 1 - 1) = 2^k + 1$$

$\therefore A_{2001} = 2^{2000} + 1$