

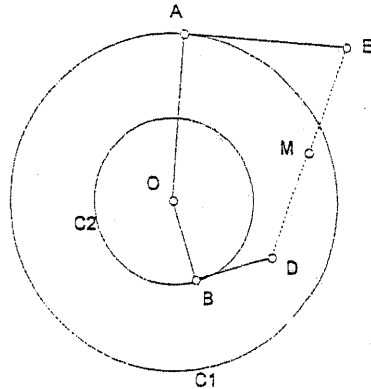
台灣省第二區九十學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】：如下圖， C_1, C_2 是兩個以 O 為圓心的相異同心圓， A, B 兩點分別在 C_1 和 C_2 上。設直線 AE 和 BD 分別為 C_1 和 C_2 的切線且 $\overline{AE} = \overline{AO}$ ， $\overline{BD} = \overline{BO}$ 。令 M 為 \overline{DE} 的中點，試證： $\triangle AMB$ 為等腰直角三角形。(16 分)



【問題二】：試證：“存在 n 個相異的正整數 a_1, \dots, a_n ，使得 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$ ”
的充分且必要條件為 “ $n \neq 2$ ”。(16 分)

【問題三】：設 $f(x) = 4x(1-x)$ ， x 為實數； $f_1(x) = f(x)$ ， $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ ， $\forall n \geq 1$ 令
 $A_n = \{x \text{ 為實數} \mid f_n(x) = 0\}$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。

- (1) 試證：對於所有 $a \in A_n$ ，都有 $0 \leq a \leq 1$ 。(8 分)
- (2) 試求 A_{2001} 的元素個數。(9 分)