

高屏地區高級中學九十學年度數學競賽複賽試題

競試(一) 編號: \_\_\_\_\_

1. 本試卷共四題
2. 考試時間: 2 小時
3. 計算紙必須連同試卷交回
4. 不可使用計算器

一、設  $n$  為正整數, 令  $D(n)$  表示  $n$  的所有正因數的平方的和, 例如:  
 $D(1) = 1^2 = 1, D(2) = 1^2 + 2^2 = 5, D(4) = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$ . 試求  
滿足條件  
 $D(n) \geq 2001$  的最小正整數  $n$ .

二、如圖,  $\triangle ABC$  為一銳角三角形,  $R_1$  為內接於此三角形之矩形,  $R_2$   
為置放於  $R_1$  上之矩形(一邊重合但圖形不重疊),  $R_3$  為置放於  $R_2$   
上之矩形(一邊重合但圖形不重疊), 依此方式繼續往上置放矩形  
 $R_4, R_5, \dots$  直至置放矩形  $R_{2001}$  為止. 若  $a(\triangle ABC), a(R_1), a(R_2), \dots, a(R_{2001})$   
分別表示  $\triangle ABC, R_1, R_2,$   
 $\dots, R_{2001}$  的面積, 試求:  $\frac{\sum_{j=1}^{2001} a(R_j)}{a(\triangle ABC)}$  的最大值。

三、設  $x_n + iy_n = (1 + \sqrt{3}i)^n$ , 其中  $n$  為正整數,  $x_n$  及  $y_n$  皆為實數, 且  
 $i = \sqrt{-1}$ .

1. 試求  $x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n$  的值。
2. 試求  $x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_n$  的值。
3. 試求最小的  $n$  值使得  $x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n > 1024^{10}$   
(已知  $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ ).
4. 是否能找出相當大的  $k$  值使得  $x_{3k} y_{3k+1}$  為有理數?

四、設  $a, b, c$  為三個相異的正整數, 且其中任意二數的乘積皆為此二  
數之和的倍數, 試證:  $a, b, c$  都不是質數, 也不是一質數的平方。