

教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽複賽

臺南地區試題（一）

問題（一）1.

參考解答

解法一：

$$\because p(x) = x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta),$$

$$\therefore p(n) = (n - \alpha)(n - \beta),$$

$$p(n+1) = (n+1 - \alpha)(n+1 - \beta) = (n - \alpha + 1)(n - \beta + 1),$$

$$\therefore p(n)p(n+1) = (n - \alpha)(n - \beta)(n - \alpha + 1)(n - \beta + 1)$$

$$= [(n - \alpha)(n - \beta + 1)][(n - \beta)(n - \alpha + 1)]$$

$$= [(n^2 - \beta n + n - \alpha n + \alpha \beta) - \alpha][(n^2 - n\alpha + n - \beta n + \alpha \beta) - \beta]$$

$$\text{令 } m = n^2 - \beta n - \alpha n + n + \alpha \beta \in \mathbb{Z}$$

$$\text{then } p(n)p(n+1) = (m - \alpha)(m - \beta) = p(m).$$

解法二：

$$p(n) = n^2 + an + b,$$

$$p(n+1) = (n+1)^2 + a(n+1) + b,$$

$$p(n)p(n+1) = (n^2 + an + b)[(n+1)^2 + a(n+1) + b]$$

$$= n^2(n+1)^2 + an^2(n+1) + bn^2 + an(n+1)^2 +$$

$$a^2n(n+1) + abn + b(n+1)^2 + ab(n+1) + b^2$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2 + an^3 + an^2 + bn^2 + an^3 + 2an^2 + an +$$

$$a^2n^2 + a^2n + abn + bn^2 + 2bn + b + abn + ab + b^2$$

$$= n^4 + (2 + 2a)n^3 + (1 + 3a + 2b + a^2)n^2 + (a + 2b + 2ab + a^2)n$$

$$+ (b + ab + b^2)$$

$$\text{令 } m = pn^2 + qn + r,$$

$$\therefore p(m) = (pn^2 + qn + r)^2 + a(pn^2 + qn + r) + b$$

$$= p^2n^4 + q^2n^2 + r^2 + 2prn^2 + 2pqn^3 + 2qrn + apn^2 + aqn + ar + b$$

$$= p^2n^4 + 2pqn^3 + (q^2 + 2pr + ap)n^2 + (2qr + aq)n + (r^2 + ar + b)$$

$$\text{令 } p(n)p(n+1) = p(m), \text{解之得 } m = n^2 + (a+1)n + b.$$

問題 (一) 2.

參考解答

解法一：

$$\therefore \frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15} = \frac{3a^5 + 5a^3 + 7a}{15},$$

欲證 $15 | 3a^5 + 5a^3 + 7a$, 即 $3 | 3a^5 + 5a^3 + 7a$ 且 $5 | 3a^5 + 5a^3 + 7a$,

(1) If $a = 3k$, $3a^5 + 5a^3 + 7a \equiv 0 \pmod{3}$,

$$\begin{aligned} \text{If } a = 3k \pm 1, \quad 3a^5 + 5a^3 + 7a &\equiv 3(\pm 1)^5 + 5(\pm 1)^3 + 7(\pm 1) \pmod{3} \\ &\equiv \pm 15 \pmod{3} \end{aligned}$$

$$\equiv 0 \pmod{3} \quad \therefore \forall a \in \mathbb{Z}, \quad 3 | 3a^5 + 5a^3 + 7a$$

(2) If $a = 5k$, $3a^5 + 5a^3 + 7a \equiv 0 \pmod{5}$

$$\begin{aligned} \text{If } a = 5k \pm 1, \quad 3a^5 + 5a^3 + 7a &\equiv 3(\pm 1)^5 + 5(\pm 1)^3 + 7(\pm 1) \pmod{5} \\ &\equiv \pm 15 \pmod{5} \\ &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{If } a = 5k \pm 2, \quad 3a^5 + 5a^3 + 7a &\equiv 3(\pm 2)^5 + 5(\pm 2)^3 + 7(\pm 2) \pmod{5} \\ &\equiv \pm 150 \pmod{5} \end{aligned}$$

$$\equiv 0 \pmod{5} \quad \therefore \forall a \in \mathbb{Z}, \quad 5 | 3a^5 + 5a^3 + 7a$$

解法二：

Case 1 : If $a > 0$, 當 $a=1$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15} = 1$ (成立)

當 $a=k$, $\frac{k^5}{5} + \frac{k^3}{3} + \frac{7k}{15} = t$ ($t \in \mathbb{Z}$), 即 $3k^5 + 5k^3 + 7k = 15t$.

$$\begin{aligned} \text{當 } a=k+1, \quad &\frac{(k+1)^5}{5} + \frac{(k+1)^3}{3} + \frac{7(k+1)}{15} \\ &= \frac{1}{15}(3k^5 + 5k^3 + 7k) + \frac{1}{15}(15k^4 + 30k^3 + 45k^2 + 30k + 15) \\ &= t + (k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

由數學歸納法得知, 當 a 為任意正整數時, $\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15}$ 為整數。

Case 2 : If $a=0$, $\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15} = 0 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Case 3 : If } a < 0, \text{ 令 } b = -a > 0, \text{ 因為由 Case 1 知 } &\frac{b^5}{5} + \frac{b^3}{3} + \frac{7b}{15} = \frac{(-a)^5}{5} + \frac{(-a)^3}{3} + \frac{7(-a)}{15} \\ &= -\left(\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15}\right) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

問題(二)

參考解答

$$\text{欲證 } 1998 < \sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2000$$

$$\text{證明: } \because \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \forall n \in N$$

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \forall n \in N$$

$$\therefore 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), \quad \forall n \in N$$

令 $m \in N \setminus \{1\}$, 則

$$2 \sum_{n=1}^m (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} < 2 \sum_{n=1}^m (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

$$\Rightarrow 2[(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{m+1}-\sqrt{m})] < \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} < 2[(1-0) + (\sqrt{2}-1) + \dots + (\sqrt{m}-\sqrt{1})]$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{m+1}-1) < \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m}$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{m}-1) < 2(\sqrt{m+1}-1) < \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m}$$

$$\therefore 2\sqrt{m}-2 < \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m}$$

$$\text{令 } m = 10^6, \text{ 則 } 1998 < \sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2000.$$

問題(三)

參考解答

(1). 在 $\triangle ABC$ 的邊上設 M, N, O, P, Q 是對應頂點上所放置的數，

由已知條件得

$$M+Q=N+P \quad \text{---(a)}$$

$$M+P=O+N \quad \text{---(b)}$$

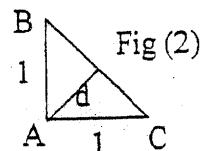
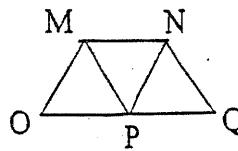
$$(a)-(b) : Q-P=P-O \Rightarrow 2P=O+Q \quad \text{---(c)}$$

\therefore 分佈在任一直線的頂點成等差數列且等差數列的最大、最小值總是出現在首、末兩項，所以最大、最小值只需在 $\triangle ABC$ 之頂點上來考慮，亦即只需討論 a, b, c 之大小。

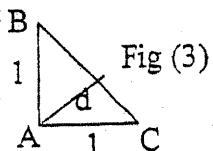
令 S 為各頂點上放置的數之總和， d 為最大數點與最小數點的距離，

Case 1 : If $a=b=c$, 則此時每一頂點的數均相等，故 $d=0$.

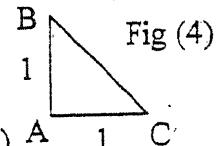
Case 2 : If $a \neq b=c$, 則 \overline{BC} 上之所有頂點所放之數均為 b ,



$$(i) \text{ 當 } n \text{ 為偶數時, } d = \overline{BC} \text{ 邊上之高} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{Fig 2})$$



$$(ii) \text{ 當 } n \text{ 為奇數時, } d = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n}\right)^2} = \frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n} \quad (\text{Fig 3})$$



Case 3 : If $a=b \neq c$, 則 \overline{AB} 上之所有頂點所放的數均為 a , 則 $d=1$, (Fig 4)

Case 4 : If $a=c \neq b$, 則 \overline{AC} 上之所有頂點所放的數均為 a , 由 Case 3 知, $d=1$,

Case 5 : If $a \neq b \neq c$, 則最大、最小值必發生在 A 或 B 或 C 上，故 $d=1$.

(2). 在 \overline{AB} 上，自 A 起算，第 k 個頂點上的數為

$$a + \frac{k-1}{n}(b-a) = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)a + \frac{k-1}{n}b \quad \text{---(d)}$$

同理在 \overline{AC} 上，自 A 起算，第 k 個頂點上的數為

$$a + \frac{k-1}{n}(c-a) = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)a + \frac{k-1}{n}c \quad \text{---(e)}$$

(d)+(e), 在此二頂點的連線上的所有頂點上的數之和為

$$\frac{k}{2} \left[\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)a + \frac{k-1}{n}b + \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)a + \frac{k-1}{n}c \right] = k \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)a + \frac{b+c}{2n} (k-1)k, k = 1, 2, \dots, n+1$$

$$S = \sum_{k=1}^{n+1} \left[k \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)a + \frac{b+c}{2n} (k-1)k \right] = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(a+b+c).$$

問題(四)

參考解答

證明一：(1) 因為 $a_n = \frac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-2}}$, $\forall n = 2, 3, 4, \dots$

所以 $a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 - 1 \dots \text{(a)}$ 且 $a_{n+1} a_{n-1} = a_n^2 - 1 \dots \text{(b)}$

$$(b) - (a) : a_n^2 - a_{n-1}^2 = a_{n+1} a_{n-1} - a_n a_{n-2} \text{ 即 } a_n(a_n + a_{n-2}) = a_{n-1}(a_{n+1} + a_{n-1})$$

$$\text{所以 } \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}, \forall n = 2, 3, 4, \dots$$

$$\text{因此 } \left\{ \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} \right\} \text{ 為一常數數列, 即 } \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_2 + a_0}{a_1}$$

$$\text{又因為 } a_1^2 = a_2 a_0 + 1, \text{ 所以 } a_2 = 3, \text{ 故 } \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{3+1}{2} = 2,$$

即 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, 由數學歸納法知, 若 a_{n-1} , a_{n-2} 為整數, 則 a_n 必為整數。

$$(2) \text{ 因為 } a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2},$$

$$\therefore a_2 - a_1 = a_1 - a_0$$

$$a_3 - a_2 = a_2 - a_1$$

⋮

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$$

將上述式子相加得 $a_{n+1} = a_n + 1$, 所以 $a_{2000} = a_{1999} + 1 = 2001$,

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{2000} a_n = \frac{2001}{2}(1+2000) = 1001 \times 2001 = 20003001.$$

證明二：因爲 $a_n = \frac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-2}}$, $\forall n = 2, 3, 4, \dots$

$$\text{所以 } a_2 = \frac{a_1^2 - 1}{a_0} = \frac{2^2 - 1}{1} = 3$$

$$a_3 = \frac{a_2^2 - 1}{a_1} = \frac{3^2 - 1}{2} = 4$$

⋮

欲證： $a_n = n + 1, \forall n = 2, 3, 4, \dots$

利用數學歸納法，已知 $a_{n-2} = n - 1$, $a_{n-1} = n$, 則 $a_n = \frac{n^2 - 1}{n - 1} = n + 1$,

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{2000} a_n = \frac{2001}{2}(1+2001) = 1001 \times 2001 = 20003001.$$