

臺灣省第四區八十九學年度
高級中學數學及自然學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為49分。
2. 考試時間：2小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一：(1)解方程式 $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$ 。（8分）

(2)求 $\sec \frac{2\pi}{9} + \sec \frac{4\pi}{9} + \sec \frac{8\pi}{9}$ 的值。（8分）

問題二：設點 A 與 B 是兩圓 O_1 與 O_2 的交點，直線 O_2B 與圓 O_1 的另一個交點為 E ，直線 O_1B 與圓 O_2 的另一個交點為 F 。過點 B 作直線 L 平行於直線 EF ，且分別交圓 O_1 與圓 O_2 於點 M 與 N ，試證： $AM + AN \geq AE + AF$ ；並說明等號成立時，兩圓的關係。（16分）

問題三：設 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 為一數列， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 4$ 且 $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$ ， $n \geq 2$ 。

證明：有無限多個正整數 n ，使得 $a_n - 1$ 和 $a_{n+1} - 1$ 都能被 89 整除。（17分）