台灣省第二區八十九學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)參考解答

【問題一】：設 $P(x)$ 為二次多項式，若 $P(x^2+4x-7)=0$ 有一根為 1，且至少有一重根，試求 $P(x^2+4x-7)=0$ 所有的根。

【參考解答】：令 $Q(x)=x^2+4x-7$，則 $0=P(Q(1))=P(-2)$。所以可設

$$P(x)=a(x+2)(x-b)\text{，}$$

其中 $a,b\in R$，$a\neq 0$。因此，

$$\begin{aligned}P(Q(x))&=a(x^2+4x-7+2)(x^2+4x-7-b)\\&=a(x-1)(x+5)(x^2+4x-7-b).\end{aligned}$$

上方程式的根為：1，-5 及二次方程式

$$x^2+4x-7-b=0 \tag{1}$$

的根。因為至少有一根為重根，所以 1 或 -5 為方程式(1)的根，或方程式(1)有重根。因為方程式(1)的二根之和為 -4，所以若 1 為方程式(1)的一個根，則 -5 亦為方程式(1)的根；這時

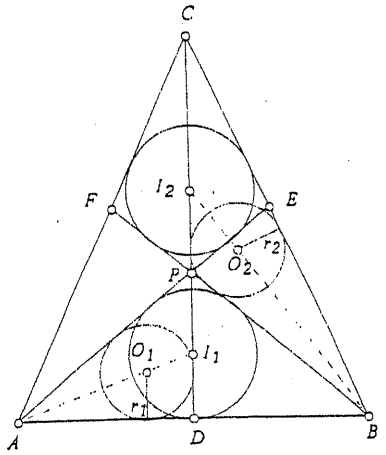
$$P(Q(x))=a(x-1)^2(x+5)^2\text{。}$$

若方程式(1)有重根，因為方程式(1)的二根之和為 -4，所以此時方程式(1)的重根為 -2，因而 $b=-11$；這時，

$$P(Q(x))=a(x-1)(x+5)(x+2)^2\text{。}$$

【問題二】：在三角形 ABC 中，$AC=BC$，P 為高 CD 上的一點，E 為直線 AP 與 BC 邊的交點，F 為直線 BP 與 AC 邊的交點。試證：若 ΔABP 與四邊形 $PECF$ 的兩內切圓全等(即兩圓的半徑相等)，則 ΔADP 與 ΔBCP 的兩內切圓全等。

【參考解答】：如圖所示



因 CD 為 $\angle APB$ 與 $\angle EPF$ 的對稱軸上，所以 ΔABP 內切圓的圓心 I_1 落在線段 PD 上，而四邊形 $PECF$ 內切圓的圓心 I_2 落在線段 CP 上。又因 ΔABP 與四邊形 $PECF$ 的兩內切圓全等，所以 $I_1P = I_2P$。設 O_1，O_2 分別為 ΔADP 與 ΔBCP 的內切圓圓心，因半線 AI_1 與 BI_2 分別為 $\angle PAD$ 與 $\angle PBE$ 的分角線，所以 O_1 落在線段 AI_1 上，而 O_2 落在線段 BI_2 上。因 $I_1P = I_2P$ 且 $AD = BD$，所以 ΔAPI_1 的面積與 ΔBPI_2 相等。記 r_1，r_2 分別為 ΔADP 與 ΔBCP 內切圓的半徑、$S(XYZ)$ 為 ΔXYZ 的面積，則我們有

$$S(API_1) = S(AO_1P) + S(O_1PI_1) = \tfrac{r_1}{2}(AP + I_1P)\text{，}$$

$$S(BPI_2) = S(BO_2P) + S(O_2PI_2) = \tfrac{r_2}{2}(BP + I_2P)\text{。}$$

因為 $S(API_1) = S(BPI_2)$，$I_1P = I_2P$，$AP = BP$，所以 $r_1 = r_2$，因而 ΔADP 與 ΔBCP 的兩內切圓全等。

【問題三】：對於正整數組 (a, b, c, d)，當 $a > b$ 時，將這一組數調整為 $(a-b, b, c+d, d)$；當 $a < b$ 時，將這一組數調整為 $(a, b-a, c, c+d)$；當前兩項相等時，即不再調整。若以正整數組 (m, n, m, n) 開始，經數次調整後，得到 $(k, k, 1999, 2001)$，試求 m 與 n 的最小公倍數。

【參考解答】：我們可以證明更一般的結果。若以正整數組 (m, n, m, n) 開始調整，經數次調整後得到終止調整數組 (k, k, x, y)；則 k 為 m 與 n 的最大公因數，而 $\frac{x+y}{2}$ 為 m 與 n 的最小公倍數。事實上，我們易知每次調整 (a, b, c, d) 後，$ad + bc$ 的值都不會改變。因此，以正整數組 (m, n, m, n) 開始調整，不論何時 $mn + nm = 2mn$ 為調整不變量，所以在終止調整時有 $kx + ky = 2mn$，因此，

$$\frac{x+y}{2} = \frac{mn}{k} = \frac{mn}{\gcd(m,n)} = \operatorname{lcm}(m,n)\text{。}$$