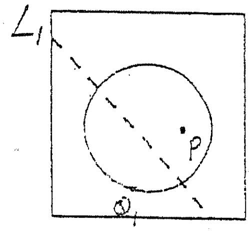
教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽複賽

高雄區試題(二)

1、設 α,β 是方程式 $\begin{vmatrix} x-\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & x-\sin\theta \end{vmatrix}=0$ 的兩根，若 n 是整數，

試求 $\alpha^n+\beta^n$ 之值。

2、給定一張紙，並在紙上畫一圓及圓內一點 P (不是圓心)。今摺紙，使得 P 點與圓上的點 Q_1 重疊，則產生一摺痕 L_1 (如圖)。重複的將 P 點與圓上的任一點摺合，產生摺痕 $L_2,L_3,\cdots$，試問這些摺痕 $L_1,L_2,\cdots$ 所圍成的圖形為何？試證之。



3、假定 Z 表示整數之集合且多項式 $f(x)=(x^3-1)(x^2-1)(x-1)\in Z[x]$，

$f_n(x)=(x^{n+2}-1)(x^{n+1}-1)(x^n-1)\in Z[x]$，試證：

必有一多項式 $g(x)\in Z[x]$，使得 $f_n(x)=g(x)f(x)$

4、定義 $B(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$

且定義 $B^{[2]}(x)=B(B(x))$; $B^{[n+1]}(x)=B(B^{[n]}(x))$, $n\ge 2$。

假設 $0\le a\le 1$ 且存在一正整數 k 使得 $B^{[k]}(a)=a$。證明：

a 必為有理數。

5、試證：對任何的自然數 n，$(3+2\sqrt{2})^n$ 之整數部份必為奇數。