八十九學年度高級中學數學科能力競試
高雄區試題（一）參考解答

1.**參考解答**

明顯地

(i) $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{AC}+\overline{BD}=2\sqrt{2}$ 且取 p 為 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 的交點時,

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=\overline{AC}+\overline{BD}$

(ii)延長 $\overrightarrow{CP}$ 交於 E,　　$\because \overline{ED}+\overline{EB}>\overline{PD}+\overline{PB}$, $\overline{EA}+\overline{ED}>\overline{PA}$

$\therefore$ 極小值為 $2\sqrt{2}$　　$\therefore \overline{EA}+\overline{ED}+\overline{EB}+\overline{EC}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$

(iii)令 E 為邊上的一點

W.L.O.G, 假設 $\overline{AE}\le\overline{ED}$ 延長 $\overrightarrow{BA}$ 取 F 使 $\overline{AF}=1$

連接 $\overline{CF}$, $\overline{EF}$　　則 $\overline{AC}+\overline{AF}>\overline{EC}+\overline{EF}=\overline{EC}+\overline{EB}$

$\therefore \overline{EC}+\overline{EB}+\overline{ED}+\overline{EA}\le\overline{AC}+\overline{AF}+\overline{AD}=2+\sqrt{2}$

取 $P=D$　　則 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}=2+\sqrt{2}$

$\therefore$ 極大值為 $2+\sqrt{2}$

2.**參考解答**

(pf)

(a) $\because f$ 為減函數 $\therefore f^{[2]}$ 增函數

(i)若 $x<f^{[2]}(x)$ 則對所有的正偶數 n

$x<f^{[2]}(x)<f^{[4]}(x)<\cdots<f^{[n]}(x)$　　$\therefore f^{[n]}(x)\neq x$

(ii)若 $x>f^{[2]}(x)$

則 $x>f^{[2]}(x)>f^{[4]}(x)>\cdots>f^{[n]}(x)$

(b)若 $x<f(x)$ 則

$f^{[i]}>f^{[i+1]}$　i:奇數

$f^{[i]}<f^{[i+1]}$　i:偶數

故存在一正奇數 n 使得 $f^{[n]}(x)=x$　　則 $f^{[n+1]}<f^{[n]}=x$

$\therefore x=f[f^{[n-1]}]>f(x)$　$\rightarrow\leftarrow$

3. **參考解答**

(a) $P(x=15)=\frac{f_{14}}{2^{15}}=\frac{377}{2^{15}}$

(b) $E(x)=6$

$[f_x=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^x]]$

$\sum_{x=1}^{\infty}xr^{x-1}=\frac{1}{(1-r)^2}$

4. **參考解答**

(1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$（內切圓）

$\triangle ABC=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\frac{a}{2k}$　$(\because \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{2R})$

故 $\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{4R}abc$

以 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$ 代入, 得

$r(\sin A+\sin B+\sin C)=4R\sin A\sin B\sin C$

但 $(\sin A+\sin B+\sin C)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$　代入並化簡

可得 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(2) $a^2-(b^2+c^2)(1-\cos A)=b^2+c^2-2bc\cos A-(b^2+c^2)+(b^2+c^2)\cos A$

$=(b-c)^2\cos A\geq 0$

故 $a^2\geq(b^2+c^2)(1-\cos A)=2(b^2+c^2)\sin^2\frac{A}{2}$

同理 $b^2\geq 2(c^2+a^2)\sin^2\frac{B}{2}$, $c^2\geq(a^2+b^2)\sin^2\frac{C}{2}$

故 $a^2b^2c^2\geq 8(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\sin^2\frac{A}{2}sin^2\frac{B}{2}sin^2\frac{C}{2}$

故 $\frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\geq 2\sin^2\frac{A}{2}sin^2\frac{B}{2}sin^2\frac{C}{2}$

由 (1) $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 代入得 $\frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\geq\frac{r}{2R}$