

教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽複賽

高雄區試題(一)

1、設 P 為邊長為 1 之正方形 $ABCD$ 內部或邊上的任意一點，試求

$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 之極小值和極大值。

2、當 $x < y$ 時恆有 $f(x) > f(y)$ ，則稱函數 f 為一減函數。令 f 為一減函

數且定義： $f^{[2]}(x) = f(f(x))$ ； $f^{[n+1]}(x) = f(f^{[n]}(x))$ ， $n \geq 2$ 。

假設 $f(x) \neq x$ 且 $f^{[2]}(x) \neq x$ ，試證：

(a) 對所有的正偶數 n ， $f^{[n]}(x) \neq x$

(b) 對所有的正奇數 n ， $f^{[n]}(x) \neq x$

3、連續投擲一枚公正的硬幣，直到出現連續兩次正面才停止投擲，並計算投擲的次數，試問：

(1) 投擲到第 15 次才出現連續兩次正面的機率為何？

(2) 平均而言為了獲得連續兩次正面的期望投擲次數為何？

4、已知一銳角三角形 $\triangle ABC$ 之邊長分別為 a, b, c 。令 r 為 $\triangle ABC$ 內切圓之半徑， R 為 $\triangle ABC$ 外接圓之半徑。試證：

$$(1) r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$(2) \frac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \geq \frac{r}{2R}$$