

# 教育部八十九學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題 (一)

編號：\_\_\_\_\_

(時間二小時)

(學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題，每題十分，滿分為四十分。
2. 考試時間：2小時。
3. 計算紙必須連同試卷交回。
4. 不可使用計算器。
5. 請將答案寫在答案欄內。

一、試找出所有滿足不等式

$$(2n+1)! < (n+1)^{2n}$$

的所有自然數  $n$ 。

二、有  $n$  條線段，其長度分別為  $1, 2, \dots, n$ 。現從其中任意選取 3 條，試問可以圍成三角形的機率是多少？

三、 $n$  為自然數，若存在  $n$  個整數  $a_1, a_2, \dots, a_n$  使得

$$\begin{aligned} n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &= a_1 a_2 \dots a_n \end{aligned}$$

則稱  $n$  為順從的自然數。

試證：當  $n \neq 4$  且  $n$  除以 4 餘 0 或 1 時， $n$  為順從的。而當  $n = 4$  或  $n$  除以 4 餘 2 或 3 時， $n$  不是順從的。

四、如右圖， $ABCD$  為一凸四邊形， $\triangle APB, \triangle BQC, \triangle CRD, \triangle DSA$  均為等腰直角三角形，即  $AP = BP, BQ = CQ, CR = DR, DS = AS$ ，而  $\angle P = \angle Q = \angle R = \angle S = 90^\circ$ ，證明  $RP$  與  $SQ$  垂直。

